Планиметрия на ЕГЭ по математике

Здесь приведены задачи по планиметрии, которые предлагались на ЕГЭ по математике (профильный уровень, сложная часть), а также на диагностических, контрольных и тренировочных работах МИОО начиная с 2009 года.

127. (*ЕГЭ, 2017*) Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к гипотенузе пересекает катет BC в точке N.

а) Докажите, что $\angle CAN = \angle CMN$.

б) Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников ANB и CBM, если $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{12}{5}$.

б) $\frac{13}{12}$

126. (*ЕГЭ, 2017*) Точка E — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O.

а) Докажите, что $CO = KO$.

б) Найдите отношение оснований трапеции BC и AD, если площадь треугольника BCK составляет $\frac{16}{81}$ площади трапеции $ABCD$.

б) $4 : 5$

125. (*ЕГЭ, 2017*) В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC. Внутри трапеции взяли точку M так, что углы ABM и DCM прямые.

а) Докажите, что $AM = DM$.

б) Найдите угол BAD, если угол ADC равен $55°$, а расстояние от точки M до прямой AD равно стороне BC.

б) $80°$

124. (*ЕГЭ, 2017*) В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M.

а) Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$.

б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника AOB, если $AB = 6$, а $BC = 4BM$.

б) 20

123. (*ЕГЭ, 2017*) Две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами 3 и 4 пересекаются в точках A и B, причём точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая эти окружности в точках M и K, причём точка A лежит между точками M и K.

а) Докажите, что треугольники MBK и O_1AO_2 подобны.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой MK, если $MK = 7$, а $O_1O_2 = 5$.

б) $\frac{84}{25}$

122. (*ЕГЭ, 2017*) Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причём меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M, отличной от A. Лучи AO и AM вторично пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P.

а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

б) Известно, что $\sin\angle AOC = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K. Найдите отношение $QK : KA$.

б) $1 : 4$

121. (*ЕГЭ, 2017*) Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается её боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 6MB$ и $2DN = 3CN$.

а) Докажите, что $AD = 3BC$.

б) Найдите длину отрезка MN, если радиус окружности равен $\sqrt{105}$.

б) 18

120. (*ЕГЭ, 2017*) В треугольник ABC, в котором длина стороны AC меньше длины стороны BC, вписана окружность с центром O. Точка B_1 симметрична точке B относительно прямой CO.

а) Докажите, что точки A, B, O и B_1 лежат на одной окружности.

б) Найдите площадь четырёхугольника $AOBB_1$, если $AB = 10$, $AC = 6$ и $BC = 8$.

б) 18

119. (*ЕГЭ, 2017*) В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH — высота, $\angle BAC = 60°$, $\angle BCA = 45°$.

а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.

б) Найдите A_1H, если $BC = 2\sqrt{3}$.

б) 1

118. (*Санкт-Петербург, пробный ЕГЭ, 2017*) Параллелограмм $ABCD$ и окружность расположены так, что сторона AB касается окружности, CD является хордой, а стороны DA и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно.

а) Докажите, что около четырехугольника $ABQP$ можно описать окружность.

б) Найдите длину отрезка DQ, если известно, что $AP = a$, $BC = b$, $BQ = c$.

б) $b + \sqrt{ac}$

117. (*МИОО, 2017*) Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K. При этом $AK : KC = = 1 : 2$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 30°$.

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P, а прямые AP и BK — в точке Q. Найдите KQ, если $BC = \sqrt{21}$.

б) 14

116. (*МИОО, 2017*) Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle DBC = 30^\circ$.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC = 9$.

б) $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

115. (*МИОО, 2017*) Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.

а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD.

б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $AC = 12$ и $BD = 6{,}5$.

б) 5

114. (*МИОО, 2017*) Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K, лежащей на стороне BC.

а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKB, если $\cos B = \frac{2}{3}$, $AC = 36$, а площадь треугольника AKC равна $126\sqrt{5}$.

б) $\frac{14}{\sqrt{5}}$

113. (*МИОО, 2017*) Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке M, а окружность с диаметром CD пересекает основание AD в точке N. Отрезки AM и CN пересекаются в точке P.

а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCP$ можно вписать окружность.

б) Найдите радиус этой окружности, если $BC = 7$, $AD = 17$.

б) $\frac{21}{5}$

112. (*МИОО, 2017*) Точки P, Q, W делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AP : PB = CQ : QB = CW : WD = 1 : 4$, а радиус окружности, описанной около треугольника PQW, равен 10; $PQ = 16$, $QW = 12$.

а) Докажите, что треугольник PQW — прямоугольный.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

б) 600

111. (*МИОО, 2017*) Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.

б) Вычислите длину стороны BC и радиус данной окружности, если $\angle A = 45^\circ$, $B_1C_1 = 6$ и площадь треугольника AB_1C_1 в восемь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

б) 18; $3\sqrt{20 - 6\sqrt{2}}$

110. (*ЕГЭ, 2016*) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.

а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны.

б) Найдите отношение EH к AC, если $\angle ABC = 30°$.

б) $3 : 4$

109. (*ЕГЭ, 2016*) В треугольнике ABC угол ABC равен $60°$. Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AC в точке M.

а) Докажите, что отрезок BM не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.

б) Найдите $\sin\angle BMC$, если известно, что отрезок BM в 2,5 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.

б) $\frac{13}{20}$

108. (*ЕГЭ, 2016*) Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает его диагональ BD в точке K.

а) Докажите, что $CK \cdot CE = AB \cdot CD$.

б) Найдите отношение $CK : KE$, если $\angle ECD = 15°$.

б) 2

107. (*ЕГЭ, 2016*) В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N — середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке L.

а) Докажите, что треугольники AML и BLC подобны.

б) Найдите отношение площадей этих треугольников, если $\cos\angle BAC = \frac{7}{25}$.

б) $\frac{25}{36}$

106. (*ЕГЭ, 2016*) Окружность касается стороны AC остроугольного треугольника ABC и делит каждую из сторон AB и BC на три равные части.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите, в каком отношении высота этого треугольника делит сторону BC.

б) $5 : 4$

105. (*ЕГЭ, 2016*) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки M и N — середины катетов AC и BC соответственно, CH — высота.

а) Докажите, что прямые MH и NH перпендикулярны.

б) Пусть P — точка пересечения прямых AC и NH, а Q — точка пересечения прямых BC и MH. Найдите площадь треугольника PQM, если $AH = 4$ и $BH = 2$.

б) $18\sqrt{2}$

104. (*ЕГЭ, 2016*) На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметрах построены окружности, второй раз пересекающиеся в точке M. Точка Q лежит на меньшей дуге MB окружности с диаметром BC. Прямая CQ второй раз пересекает окружность с диаметром AC в точке P.

а) Докажите, что прямые PM и QM перпендикулярны.

б) Найдите PQ, если $AM = 1$, $BM = 3$, а Q — середина дуги MB.

б) 2

103. (*ЕГЭ, 2016*) Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$, перпендикулярна диагонали AC и пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

а) Докажите, что BM и BD делят угол B на три равных угла.

б) Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ до прямой CM, если $DC = 6\sqrt{21}$.

б) $3\sqrt{3}$

102. (*ЕГЭ, 2016*) Точка O — центр окружности, описанной вокруг остроугольного треугольника ABC, I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка I лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.

б) Найдите угол OIH, если $\angle ABC = 55^\circ$.

б) 175°

101. (*МИОО, 2016*) Окружность, проходящая через вершины A, C и D прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, пересекает меньшую боковую сторону AB в точке P и касается прямой BC. Известно, что $AD = CD$.

а) Докажите, что CP — биссектриса угла ACB.

б) В каком отношении прямая DP делит площадь трапеции?

б) $4 : 5$

100. (*МИОО, 2016*) В треугольнике ABC проведены две высоты BM и CN, причём $AM : CM = 2 : 3$ и $\cos \angle BAC = 2/\sqrt{5}$.

а) Докажите, что угол ABC тупой.

б) Найдите отношение площадей треугольников BMN и ABC.

б) $2 : 5$

99. (*МИОО, 2016*) Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, прямые LM и MN — касательные к окружности, описанной около треугольника KLN.

а) Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.

б) Найдите площадь треугольника KLN, если известно, что $KN = 3$, а $\angle LMN = 120^\circ$.

б) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

98. (*МИОО, 2016*) Диагональ BD четырёхугольника $ABCD$ с параллельными сторонами AD и BC разбивает его на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и DC.

а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD.

б) Найдите CD, если известны диагонали четырёхугольника $BD = 5$ и $AC = 8$.

б) 6

97. (*МИОО, 2016*) Первая окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник KLM, касается боковой стороны KL в точке B, а основания ML — в точке A. Вторая окружность с центром O_1 касается основания ML и продолжений боковых сторон.

а) Докажите, что треугольник OLO_1 прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что радиус первой равен 6 и $AK = 16$.

б) 24

96. (*МИОО, 2015*) В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке M, причём $AM = 2R$ и $CM = 3R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что $R = 2$.

б) $\sqrt{5}$

95. (*ЕГЭ, 2015*) Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C — вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.

б) Пусть N — точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM : MC = 3 : 4$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 24.

б) 98

94. (*ЕГЭ, 2015*) Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P. Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.

б) Пусть L — точка пересечения отрезков KM и AP. Найдите AL, если радиус большей окружности равен 26, а $BC = 48$.

б) $2\sqrt{26}$

93. (*ЕГЭ, 2015*) Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причём $BC = CD$.

а) Докажите, что $AB : BC = AP : PD$.

б) Найдите площадь треугольника COD, где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABD, если дополнительно известно, что BD — диаметр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности, $AB = 6$ и $BC = 6\sqrt{2}$.

б) $18\sqrt{3}$

92. (*ЕГЭ, 2015*) В трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность с центром в точке O.

а) Докажите, что $\sin\angle AOD = \sin\angle BOC$.

б) Найдите площадь трапеции, если $\angle BAD = 90°$, а основания равны 5 и 7.

б) 35

91. (*ЕГЭ, 2015*) В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания AD, вторая — боковых сторон, меньшего основания BC и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание AD в точке P. Докажите, что $AP/PD = \sin D$.

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны 3 и 1.

б) $30 + 16\sqrt{3}$

90. (*ЕГЭ, 2015*) Окружность, построенная на медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, второй раз пересекает основание BC в точке K.

а) Докажите, что отрезок BK втрое больше отрезка CK.

б) Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке N. Найдите AB, если $BK = 9$ и $BN = 11$.

б) 18

89. (*ЕГЭ, 2015*) К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P. В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM : MB = 1 : 2$?

б) $1 : 2$

88. (*МИОО, 2015*) Окружность с центром O проходит через вершины B и C большей боковой стороны прямоугольной трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AD в точке T. Точка O лежит внутри трапеции $ABCD$.

а) Докажите, что угол BOC вдвое больше угла BTC.

б) Найдите расстояние от точки T до прямой BC, если основания трапеции AB и CD равны 4 и 9 соответственно.

б) 6

87. (*МИОО, 2015*) Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 12$.

б) 180

86. (*МИОО, 2015*) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны $AC = 15$, $BC = 8$. Окружность радиуса 2,5 с центром O на стороне BC проходит через вершину C. Вторая окружность касается катета AC, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем 1/4 длины катета AC.

б) Найдите радиус второй окружности.

б) 2,5

85. (*МИОО, 2015*) Хорды AD, BE и CF окружности делят друг друга на три равные части.

а) Докажите, что эти хорды равны.

б) Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$, если точки A, B, C, D, E последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен $2\sqrt{21}$.

б) $117\sqrt{3}$

84. (*ЕГЭ, 2014*) Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.

б) Найдите BC, если $AH = 4$ и $\angle BAC = 60°$.

б) $4\sqrt{3}$

83. (*ЕГЭ, 2014*) Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.

а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.

б) Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит её на отрезки, равные 2 и 50.

$2\sqrt{986}$

82. (*ЕГЭ, 2014*) В треугольнике ABC проведена биссектриса AM. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM, пересекает сторону AC в точке N; $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 9$.

а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите, чему равно отношение $AP : PN$.

3

81. (*ЕГЭ, 2014*) К двум непересекающимся окружностям равных радиусов проведены две параллельные общие касательные. Окружности касаются одной из этих прямых в точках A и B. Через точку C, лежащую на отрезке AB, проведены касательные к этим окружностям, пересекающие вторую прямую в точках D и E, причём отрезки CA и CD касаются одной окружности, а отрезки CB и CE — другой.

а) Докажите, что периметр треугольника CDE вдвое больше расстояния между центрами окружностей.

б) Найдите DE, если радиусы окружностей равны 5, расстояние между их центрами равно 18, а $AC = 8$.

12,375

80. (*ЕГЭ, 2014*) Диагональ AC разбивает трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, из которых AD — большее, на два подобных треугольника.

а) Докажите, что $\angle ABC = \angle ACD$.

б) Найдите отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, если $BC = 18$, $AD = 50$ и $\cos \angle CAD = 3/5$.

$8\sqrt{13}$

79. (*ЕГЭ, 2014*) В равнобедренном треугольнике ABC с углом $120°$ при вершине A проведена биссектриса BD. В треугольник ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона FH лежит на отрезке BC, а вершина E — на отрезке AB.

а) Докажите, что $FH = 2DH$.

б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 4$.

$24 - 12\sqrt{3}$

78. (*ЕГЭ, 2014*) Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90^\circ$.

а) Докажите, что четырёхугольник $OBKC$ вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной вокруг четырёхугольника $OBKC$, если $BC = 48$ и $\cos\angle BAC = 3/5$.

$\boxed{25}$

77. (*МИОО, 2014*) На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от её середины. Из неё на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили перпендикуляры.

а) Докажите, что четырёхугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров, является трапецией.

б) Найдите площадь полученной трапеции, если площадь параллелограмма равна 16, а один из его углов равен 60°.

$\boxed{6}$

76. (*Санкт-Петербург, пробный ЕГЭ, 2014*) Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке P и пересекает отрезок BO в точке Q. При этом отрезки OC и QP параллельны.

а) Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный треугольник.

б) Найдите площадь треугольника BQP, если точка O делит высоту BD треугольника в отношении $BO : OD = 3 : 1$ и $AC = 2a$.

$\boxed{\frac{a^2\sqrt{3}}{3}}$

75. (*МИОО, 2014*) На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.

а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 12$, $CH = 5$.

$\boxed{\frac{13}{2}}$

74. (*МИОО, 2014*) Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую — в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

б) Найдите отношение $BP : PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

$\boxed{2}$

73. (*МИОО, 2013*) Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

$\boxed{\frac{63}{2}}$

72. (*МИОО, 2013*) Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T.

а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.

б) Найдите угол BAD, если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.

$\boxed{60^\circ}$

71. (*МИОО, 2013*) В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке D, причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F. Найдите площадь треугольника BEF, если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

$\boxed{40}$

70. (*ЕГЭ, 2013*) Радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 равны соответственно 2 и 9. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных и прямой O_1O_2, если $O_1O_2 = 21$.

$\boxed{8 \text{ или } 80}$

69. (*ЕГЭ, 2013*) Угол C треугольника ABC равен 30°, D — отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $BD : DC = 1 : 6$. Найдите синус угла A.

$\boxed{\frac{5\sqrt{13}}{26} \text{ или } \frac{7\sqrt{13}}{26}}$

68. (*ЕГЭ, 2013*) В окружности проведены хорды PQ и CD, причем $PQ = PD = CD = 12$, $CQ = 4$. Найдите CP.

$\boxed{4\sqrt{6} \text{ или } 8\sqrt{3}}$

67. (*ЕГЭ, 2013*) Окружности радиусов 1 и 4 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом в точке C. AO_1 и BO_2 — параллельные радиусы этих окружностей, причём $\angle AO_1O_2 = 60^\circ$. Найдите AB.

$\boxed{5 \text{ или } 7}$

66. (*ЕГЭ, 2013*) Окружности радиусов 3 и 5 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 15^\circ$.

$\boxed{10 \text{ или } 5/2}$

65. (*ЕГЭ, 2013*) Окружность радиуса 6 вписана в угол, равный 60°. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N. Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 4. Найдите MN.

$\boxed{3\sqrt{7} \text{ или } 3\sqrt{15}}$

64. (*ЕГЭ, 2013*) Окружность радиуса $6\sqrt{2}$ вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N. Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 8. Найдите MN.

$\boxed{4\sqrt{2} \text{ или } 4\sqrt{14}}$

63. (*ФЦТ, 2013*) Две стороны треугольника равны 8 и 10, косинус угла между ними равен $2/5$. В треугольник вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол (вершина ромба, противоположная вершине этого угла, лежит на третьей стороне треугольника). Найдите сторону ромба.

$\boxed{5 \text{ или } \frac{40}{9}}$

62. (*МИОО, 2013*) Расстояния от точки M, расположенной внутри прямого угла, до сторон угла равны 4 и 3. Через точку M проведена прямая, отсекающая от угла треугольник, площадь которого равна 32. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри угла.

$\boxed{4\sqrt{17} \text{ или } \frac{4\sqrt{97}}{3}}$

61. (*МИОО, 2013*) Окружность, вписанная в треугольник ABC, площадь которого равна 66, касается средней линии, параллельной стороне BC. Известно, что $BC = 11$. Найдите сторону AB.

$\boxed{13 \text{ или } 20}$

60. (*МИОО, 2012*) Вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Радиусы двух вневписанных окружностей прямоугольного треугольника равны 7 и 17. Найдите расстояние между их центрами.

$\boxed{26 \text{ или } 24\sqrt{2}}$

59. (*МИОО, 2012*) Дан прямоугольник $KLMN$ со сторонами: $KN = 11$, $MN = 8$. Прямая, проходящая через вершину M, касается окружности с центром K радиуса 4 и пересекается с прямой KN в точке Q. Найдите QK.

$\boxed{5 \text{ или } 37/3}$

58. (*ЕГЭ, 2012*) Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 10 и 26 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 12, средняя линия трапеции равна 24. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

$\boxed{2 \text{ или } 6}$

57. (*ЕГЭ, 2012*) Дан равнобедренный треугольник с боковой стороной 4 и углом 120°. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

$\boxed{\sqrt{3} - 1 \text{ или } \frac{3-\sqrt{3}}{2}}$

56. (*ЕГЭ, 2012*) В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 7$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

7 или 14/9

55. (*ЕГЭ, 2012*) Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной $14\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, касающейся окружностей, описанных около треугольников AOB, COD и EOF.

28 или 12

54. (*ЕГЭ, 2012*) Продолжение биссектрисы CD неравнобедренного треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке E. Окружность, описанная около треугольника ADE, пересекает прямую AC в точке F, отличной от A. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AC = 8$, $AF = 3$, угол BAC равен $45°$.

$\frac{11}{\sqrt{2}}$

53. (*ЕГЭ, 2012*) Угол C треугольника ABC равен $30°$, D — отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $DB : DC = 2 : 5$. Найдите синус угла A.

$\frac{7\sqrt{111}}{74}$ или $\frac{3\sqrt{111}}{74}$

52. (*ЕГЭ, 2012*) На прямой, содержащей медиану AD прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, взята точка E, удаленная от вершины A на расстояние, равное 4. Найдите площадь треугольника BCE, если $BC = 6$, $AC = 4$.

2,4 или 21,6

51. (*МИОО, 2012*) Площадь трапеции $ABCD$ равна 135. Диагонали пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

15/4 или 12/5

50. (*МИОО, 2012*) Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 15$, $AC = 9$ и $BC = 12$. На стороне BC взята точка D, а на отрезке AD — точка O, причём $CD = 4$ и $AO = 3OD$. Окружность с центром O проходит через точку C. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения этой окружности с прямой AB.

7,5 или 7,2

49. (*Москва, репетиционный ЕГЭ, 2012*) Расстояние между двумя параллельными прямыми равно 24. На одной из них взята точка C, а на другой взяты точки A и B так, что треугольник ABC — остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 25. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

625/48 или 125/8

48. (*Санкт-Петербург, репетиционный ЕГЭ, 2012*) Дан треугольник ABC. Точка E на прямой AC выбрана так, что треугольник ABE, площадь которого равна 14, — равнобедренный с основанием AE и высотой BD. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$.

$\boxed{25 \text{ или } 39}$

47. (*ФЦТ, 2012*) Радиусы окружностей S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 равны 1 и 7 соответственно, расстояние между точками O_1 и O_2 равно 5. Хорда AB окружности S_2 касается окружности S_1 в точке M, причём точки O_1 и O_2 лежат по одну сторону от прямой AB. Найдите длину отрезка AB, если известно, что $AM : MB = 1 : 6$.

$\boxed{7\sqrt{3} \text{ или } 7\sqrt{143}/6}$

46. (*Юг, пробный ЕГЭ, 2012*) Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, равен 150 см, косинус угла при его основании равен 7/8. Найдите радиус окружности, касающейся вписанной окружности этого треугольника и двух его сторон.

$\boxed{10\,\text{см или } 90\,\text{см}}$

45. (*МИОО, 2011*) Расстояние между параллельными прямыми равно 6. На одной из них лежит вершина C, на другой — основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = 16$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

$\boxed{\frac{\sqrt{730}}{3} \text{ или } \frac{\sqrt{10}}{3}}$

44. (*МИОО, 2011*) Точка M лежит на отрезке AB. На окружности с диаметром AB взята точка C, удалённая от точек A, M и B на расстояния 20, 14 и 15 соответственно. Найдите площадь треугольника BMC.

$\boxed{54 \pm 12\sqrt{13}}$

43. (*МИОО, 2011*) Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 15$ и $BC = 8$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 17. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающейся окружности S.

$\boxed{\frac{51}{8} \text{ или } \frac{85}{8}}$

42. (*МИОО, 2011*) Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 40, а отношение катетов треугольника равно 15/8.

$\boxed{25 \text{ или } 32}$

41. (*ЕГЭ, 2011*) Окружность, вписанная в треугольник ABC, площадь которого равна 36, касается средней линии, параллельной стороне BC. Известно, что $BC = 9$. Найдите сторону AB.

$\boxed{10 \text{ или } 17}$

40. (*ЕГЭ, 2011*) Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок прямой, заключённый внутри треугольника, равен 6, а отношение боковой стороны треугольника к его основанию равно 5/6.

9/2 или 21/4

39. (*ЕГЭ, 2011*) Дана окружность радиуса 4 с центром в точке O, расположенной на биссектрисе угла, равного $60°$. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности внешним образом, если известно, что расстояние от точки O до вершины угла равно 10.

2 или 14

38. (*ЕГЭ, 2011*) Окружность радиуса 6 вписана в равнобедренную трапецию, большее основание которой равно 18. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

1/2 или 162/299

37. (*ЕГЭ, 2011*) Точки A, B и C лежат на сторонах соответственно KL, LM и KM треугольника KLM, причём $KABC$ — параллелограмм, площадь которого составляет 3/8 площади треугольника KLM. Найдите диагональ AC параллелограмма, если известно, что $KL = 8$, $KM = 12$ и $\cos\angle LKM = 7/12$.

8 или $2\sqrt{6}$

36. (*ЕГЭ, 2011*) Через вершину B правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $1 : 2$. Найдите отношение $CK : KF$.

2 или 3/5

35. (*ЕГЭ, 2011*) Расстояния от точки M, расположенной внутри угла, равного $60°$, до сторон угла равны 1 и 2. Найдите радиус окружности, вписанной в этот угол и проходящей через точку M.

$2 \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$

34. (*Москва, репетиционный ЕГЭ, 2011*) Найти радиус окружности, вписанной в угол MKN, равный $2\arcsin 0{,}6$, и касающейся окружности радиуса 4, также вписанной в угол MKN.

1 или 16

33. (*Санкт-Петербург, репетиционный ЕГЭ, 2011*) Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности и вписан в окружность. Прямые AB и DC пересекаются в точке M. Найдите площадь четырёхугольника, если известно, что $\angle AMD = \alpha$ и радиусы окружностей, вписанных в треугольники BMC и AMD, равны соответственно r и R.

$\frac{R(R^2-r^2)}{r}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ или $\frac{r(r^2-R^2)}{R}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$

32. (*МИОО, 2011*) Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина C, на другой — основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = 10$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

$\frac{\sqrt{793}}{3}$ или $\frac{4\sqrt{13}}{3}$

31. (*МИОО, 2011*) Прямая, проведённая через середину N стороны AB квадрата $ABCD$, пересекает прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образует с прямой AB угол, тангенс которого равен 4. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 8.

16 или 48

30. (*МИОО, 2011*) Площадь трапеции $ABCD$ равна 90, а одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$.

10 или 4

29. (*МИОО, 2010*) Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 5$, $\angle A = 60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

$\frac{35\sqrt{3}}{12}$ или $\frac{23\sqrt{3}}{6}$

28. (*МИОО, 2010*) Растояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка C, а на другой — точки A и B, причём треугольник ABC — остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

$\frac{26-4\sqrt{13}}{3}$ или $10/3$

27. (*МИОО, 2010*) Окружность S радиуса 12 вписана в прямоугольную трапецию с основаниями 28 и 21. Найдите радиус окружности, которая касается основания, большей боковой стороны и окружности S.

3 или $4/3$

26. (*МИОО, 2010*) Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B, пересекаются в точках C и D, причём $AB = 8$, $CD = 15$. Найдите медиану CE треугольника ABC.

16 или 1

25. (*МИОО, 2010*) В треугольнике KLM проведены биссектриса KP и высота KH. Известно, что $KM/KL = 1/2$, $PH/MH = 3/2$, а площадь треугольника KHP равна 30. Найдите площадь треугольника KLM.

30 или 150

24. (*ЕГЭ, 2010*) Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M лежит на диагонали BD и делит её в отношении $1:2$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь четырёхугольника $ABCM$ равна 60.

180 или 90

23. (*ЕГЭ, 2010*) Диагонали трапеции равны 5 и $\sqrt{20}$, а высота равна 4. Найдите площадь трапеции.

10 или 2

22. (*ЕГЭ, 2010*) В окружности, радиус которой равен 5, проведена хорда $AB = 8$. Точка C лежит на хорде AB так, что $AC : BC = 1 : 2$. Найдите радиус окружности, касающейся данной окружности и касающейся хорды AB в точке C.

8/9 или 32/9

21. (*ЕГЭ, 2010*) В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 1 : 5$ Найдите BC, если $AB = 3$.

7/2 или 21

20. (*ЕГЭ, 2010*) В треугольнике ABC $AB = 15$, $BC = 8$, $CA = 9$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 3 : 8$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

7 или 53/11

19. (*ЕГЭ, 2010*) В окружность радиуса $3\sqrt{5}/2$ вписана трапеция с основаниями 3 и 4. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции.

$\frac{24+3\sqrt{29}}{14}$ или $\frac{24-3\sqrt{29}}{14}$

18. (*МИОО, 2010*) Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и 8 равно 15. Этих окружностей и их общей внутренней касательной касается третья окружность. Найдите её радиус.

125/32 или 125/8

17. (*МИОО, 2010*) Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 12$ и $BC = 5$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 8. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и внешним образом касающейся окружности S.

21/25 или 5

16. (*МИОО, 2010*) На стороне прямого угла с вершиной A взята точка O, причём $AO = 7$. С центром в точке O проведена окружность S радиуса 1. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности S.

4 или 12

15. (*МИОО, 2010*) Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 и 9 равно 17. Обе окружности лежат по одну сторону от общей касательной. Третья окружность касается обеих окружностей и их общей касательной. Найдите радиус третьей окружности.

225/64 или 225/16

14. (*МИОО, 2010*) Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 13; высота, проведённая к стороне BC, равна 5; $\cos\angle BAC = 5/13$. Найдите длину той хорды AM описанной окружности, которая делится пополам стороной BC.

$\sqrt{26\left(13 \pm \sqrt{69}\right)} = \sqrt{299} \pm \sqrt{39}$

13. (*МИОО, 2010*) Центр O окружности радиуса 4 принадлежит биссектрисе угла величиной 60°. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности, если известно, что расстояние от точки O до вершины угла равно 10.

2; 14; 14/3; 6

12. (*МИОО, 2010*) Расстояния от общей хорды двух пересекающихся окружностей до их центров относятся как 2 : 5. Общая хорда имеет длину $2\sqrt{3}$, а радиус одной из окружностей в два раза больше радиуса другой окружности. Найдите расстояние между центрами окружностей.

7 или 3

11. (*МИОО, 2010*) Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $BC = 7$, $BD = 3$.

5 или 2

10. (*МИОО, 2010*) В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED = \angle DEC$. Найдите AE.

1 или 3

9. (*МИОО, 2010*) Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Найдите высоту трапеции, если её средняя линия равна 3 и $\sin\angle AOB = 3/5$.

1 или 9

8. (*МИОО, 2010*) Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключённого между точками касания, если радиусы окружностей равны 23 и 7, а расстояние между центрами окружностей равно 34.

30 или 16

7. (*Москва, репетиционный ЕГЭ, 2010*) Точка H — основание высоты треугольника со сторонами 10, 12, 14, опущенной на сторону, равную 12. Через точку H проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке M. Найдите HM.

7/3 или 14/5

6. (*МИОО, 2009*) Точки D и E — основания высот непрямоугольного треугольника ABC, проведённых из вершин A и C соответственно. Известно, что $DE/AC = k$, $BC = a$ и $AB = b$. Найдите сторону AC.

$\boxed{\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2kab}}$

5. (*МИОО, 2009*) В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = a$, $BC = b$ и $\angle BAD = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

$\boxed{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}\,|\operatorname{ctg}\alpha|}$

4. (*МИОО, 2009*) Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α, $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

$\boxed{2 \text{ или } 10}$

3. (*МИОО, 2009*) Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$; $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC, касается стороны CD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

$\boxed{5 \text{ или } 30}$

2. (*МИОО, 2009*) В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD : DC = 1 : 2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF?

$\boxed{1/10}$

1. (*МИОО, 2009*) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE. Найдите длину отрезка DE, если $AC = 6$, $AE = 2$, $CD = 3$.

$\boxed{\sqrt{29/5}}$