Показательные уравнения и неравенства на ЕГЭ по математике

Здесь приведены показательные уравнения и неравенства, которые предлагались на ЕГЭ по математике (профильный уровень, сложная часть), а также на диагностических, контрольных и тренировочных работах МИОО начиная с 2009 года.

1. (*ЕГЭ, 2017*) а) Решите уравнение

$$8^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 2^{5-x} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_5 2; \log_5 20]$.

а) $2, \frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$

2. (*Санкт-Петербург, пробный ЕГЭ, 2017*) а) Решите уравнение

$$4^x - 2^{x+3} + 15 = 0.$$

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $\left[2; \sqrt{10}\,\right]$.

а) $\log_2 3, \log_2 5$; б) $\log_2 5$

3. (*МИОО, 2017*) Решите неравенство

$$\frac{35^{|x|} - 5^{|x|} - 5 \cdot 7^{|x|} + 5}{2^{\sqrt{x+2}} + 1} \geqslant 0.$$

$[-2; -1] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$

4. (*МИОО, 2017*) Решите неравенство

$$3^{|x|} - 8 - \frac{3^{|x|} + 9}{9^{|x|} - 4 \cdot 3^{|x|} + 3} \leqslant \frac{5}{3^{|x|} - 1}\,.$$

$[-2; -1) \cup [-\log_3 2; 0) \cup (0; \log_3 2] \cup (1; 2]$

5. (*МИОО, 2017*) Решите неравенство

$$\frac{3^{2x} - 54 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2(x+1)} - 1}{x+3} \leqslant 0.$$

$\left(-3; \frac{1}{2}\right]$

6. (*МИОО, 2017*) Решите неравенство

$$\frac{15^x - 3^{x+1} - 5^{x+1} + 15}{-x^2 + 2x} \geqslant 0.$$

$\boxed{(0; \log_5 3] \cup [\log_3 5; 2)}$

7. (*ЕГЭ, 2016*) Решите неравенство

$$\frac{4^x - 2^{x+4} + 30}{2^x - 2} + \frac{4^x - 7 \cdot 2^x + 3}{2^x - 7} \leqslant 2^{x+1} - 14.$$

$\boxed{(-\infty; 1) \cup [2; \log_2 7)}$

8. (*ЕГЭ, 2016*) Решите неравенство

$$\frac{9^x - 3^{x+1} - 19}{3^x - 6} + \frac{9^{x+1} - 3^{x+4} + 2}{3^x - 9} \leqslant 10 \cdot 3^x + 3.$$

$\boxed{(-\infty; 1] \cup (\log_3 6; 2)}$

9. (*ЕГЭ, 2016*) Решите неравенство

$$125^x - 25^x + \frac{4 \cdot 25^x - 20}{5^x - 5} \leqslant 4.$$

$\boxed{\{0\} \cup (\log_5 4; 1)}$

10. (*ЕГЭ, 2016*) Решите неравенство

$$\frac{27^{x+\frac{1}{3}} - 10 \cdot 9^x + 10 \cdot 3^x - 5}{9^{x+\frac{1}{2}} - 10 \cdot 3^x + 3} \leqslant 3^x + \frac{1}{3^x - 2} + \frac{1}{3^{x+1} - 1}.$$

$\boxed{(-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup (\log_3 2; 1)}$

11. (*ЕГЭ, 2016*) а) Решите уравнение

$$2^{4\cos x} + 3 \cdot 2^{2\cos x} - 10 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

$\boxed{\text{а) } \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\quad \text{б) } \frac{5\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3}}$

12. (*ЕГЭ, 2016*) а) Решите уравнение

$$8^x - 7 \cdot 4^x - 2^{x+4} + 112 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\log_2 5; \log_2 11]$.

$\boxed{\text{а) } 2,\ \log_2 7;\quad \text{б) } \log_2 7}$

13. (*МИОО, 2016*) Решите неравенство

$$2^{\frac{x}{x+1}} - 2^{\frac{5x+3}{x+1}} + 8 \leqslant 2^{\frac{2x}{x+1}}.$$

$\boxed{(-\infty; -1) \cup [0; +\infty)}$

14. (*МИОО, 2016*) Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot 3^{2x+1} - 6^x - 4^{x+1} - 9}{9^x - 3} \leqslant 3.$$

$\boxed{\left(\frac{1}{2}; \log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{3}\right]}$

15. (*МИОО, 2016*) Решите неравенство

$$\frac{2^{2x+1} - 96 \cdot 0{,}5^{2x+3} + 2}{x+1} \leqslant 0.$$

$\boxed{(-1; \tfrac{1}{2}]}$

16. (*ЕГЭ, 2015*) Решите неравенство

$$\frac{31 - 5 \cdot 2^x}{4^x - 24 \cdot 2^x + 128} \geqslant 0{,}25.$$

$\boxed{\{1\} \cup (3; 4)}$

17. (*ЕГЭ, 2015*) Решите неравенство

$$\frac{2}{3^x - 9} \geqslant \frac{8}{3^x - 3}.$$

$\boxed{(-\infty; 1) \cup (2; \log_3 11]}$

18. (*ЕГЭ, 2015*) Решите неравенство

$$\frac{105}{\left(2^{4-x^2} - 1\right)^2} - \frac{22}{2^{4-x^2} - 1} + 1 \geqslant 0.$$

$\boxed{(-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup \{0\} \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)}$

19. (*МИОО, 2015*) Решите неравенство

$$\frac{81^x + 2 \cdot 25^{x \log_5 3} - 5}{(4x-1)^2} \geqslant 0.$$

$\boxed{\left[\log_9 \left(\sqrt{6} - 1\right); \tfrac{1}{4}\right) \cup \left(\tfrac{1}{4}; +\infty\right)}$

20. (*ЕГЭ, 2014*) а) Решите уравнение:

$$3 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^{x} + 3 \cdot 4^{x+1} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 3]$.

а) $\log_{\frac{3}{2}} 3$, $\log_{\frac{3}{2}} 4$; б) $\log_{\frac{3}{2}} 3$

21. (*МИОО, 2013*) а) Решите уравнение:

$$7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 48 \cdot 4^{x^2-3x} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 2]$.

а) $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; б) $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$

22. (*ЕГЭ, 2013*) а) Решите уравнение:

$$25^{x-\frac{3}{2}} - 12 \cdot 5^{x-2} + 7 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(2; \dfrac{8}{3}\right)$.

а) 2, $\log_5 35$; б) $\log_5 35$

23. (*ЕГЭ, 2013*) а) Решите уравнение:

$$9^{x+1} - 2 \cdot 3^{x+2} + 5 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\log_3 \frac{3}{2}; \sqrt{5}\right)$.

а) -1, $\log_3 \frac{5}{3}$; б) $\log_3 \frac{5}{3}$

24. (*ЕГЭ, 2013*) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2^{x} + 17 \cdot 2^{3-x} \leqslant 25, \\ \dfrac{x^2 - 3x - 5}{x-4} + \dfrac{3x^2 - 15x + 2}{x-5} \leqslant 4x + 1. \end{cases}$$

$\{3\} \cup (4; \log_2 17]$

25. (*ЕГЭ, 2013*) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{2x+2} - 21 \cdot 2^{x-1} + 1 \leqslant 0, \\ \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} + \dfrac{3x+1}{x-1} \leqslant \dfrac{4x+1}{x}. \end{cases}$$

$\{-3\} \cup \left(-2; -\log_2 \frac{5}{2}\right]$

26. (*ЕГЭ, 2013*) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 4^x - 29 \cdot 2^x + 168 \leqslant 0, \\ \dfrac{x^4 - 5x^3 + 3x - 25}{x^2 - 5x} \geqslant x^2 - \dfrac{1}{x-4} + \dfrac{5}{x}\,. \end{cases}$$

$\boxed{\{3\} \cup (4; \log_2 21]}$

27. (*МИОО, 2013*) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + \left(1 - \sqrt{10}\right) x - \sqrt{10} \leqslant 0, \\ \dfrac{3^{|x^2 - 2x - 1|} - 9}{x} \geqslant 0. \end{cases}$$

$\boxed{(-1; 0) \cup \{1\} \cup \left[3; \sqrt{10}\right]}$

28. (*МИОО, 2012*) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{5^{x+1} - 1} + \dfrac{5^{x+1} - 2}{5^{x+1} - 3} \geqslant 2, \\ \left(\dfrac{2}{25x^2 + 40x + 7} + \dfrac{25x^2 + 40x + 7}{2}\right)^2 \geqslant 4. \end{cases}$$

$\boxed{(-1; \log_5 0{,}4] \cup (\log_5 0{,}6; -0{,}2) \cup (-0{,}2; 0]}$

29. (*МИОО, 2012*) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2^x + 6 \cdot 2^{-x} \leqslant 7, \\ \dfrac{2x^2 - 6x}{x - 4} \leqslant x. \end{cases}$$

$\boxed{\{0\} \cup [2; \log_2 6]}$

30. (*МИОО, 2009*) Решите неравенство:

$$\left(3^{\frac{x-2}{2}} - 1\right) \sqrt{3^x - 10\sqrt{3^x} + 9} \geqslant 0.$$

$\boxed{\{0\} \cup [4; +\infty)}$