Дроби

1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.2, 7–8.1*) Найдите две положительные несократимые дроби со знаменателями, не превосходящими 100, сумма которых равна 86/111.

2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.3*) Найдите все несократимые положительные дроби, которые увеличиваются в 3 раза, если увеличить и числитель и знаменатель на 12.

3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.3; 7–8.2; 9.1*) Расставьте знаки арифметических действий и скобки в выражении, состоящем из трёх чисел

$$\frac{1}{8}\ldots\frac{1}{9}\ldots\frac{1}{28}\,,$$

так, чтобы результат вычислений был равен $\frac{1}{2016}$.

4. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 7.1*) Приведите пример двух обыкновенных дробей, разность которых в три раза больше их произведения. Приведите вычисления, обосновывающие это свойство.

5. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 7.1*) Расставьте скобки, чтобы равенство стало верным:

$$0{,}5+0{,}5:0{,}5+0{,}5:0{,}5=5.$$

6. (*Математический праздник, 1997, 6.2*) В папирусе Ринда (Древний Египет) среди прочих сведений содержатся разложения дробей в сумму дробей с числителем 1, например,

$$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{x}\,.$$

Один из знаменателей здесь заменён буквой x. Найдите этот знаменатель.

365

7. (*Московская устная олимпиада, 2017, 6.5*) Можно ли в равенстве

$$\frac{*}{*}+\frac{*}{*}+\frac{*}{*}+\frac{*}{*}=*$$

заменить звездочки цифрами от 1 до 9, взятыми по одному разу, так, чтобы равенство стало верным?

8. (*Математический праздник, 2003, 7.1*) Расставьте скобки и знаки арифметических действий так, чтобы получилось верное равенство:

$$\frac{1}{2}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{6009}=2003.$$

9. (*Математический праздник, 1999, 7.1*) Числитель и знаменатель дроби — натуральные числа, дающие в сумме 101. Известно, что дробь не превосходит 1/3. Укажите наибольшее возможное значение такой дроби.

25/76

10. (*Московская устная олимпиада, 2012, 7.1*) Записаны шесть положительных несократимых дробей, сумма числителей которых равна сумме их знаменателей. Паша перевёл каждую из неправильных дробей в смешанное число. Обязательно ли найдутся два числа, у которых одинаковы либо целые части, либо дробные части?

11. (*Математический праздник, 2004, 6–7.3*) а) Придумайте три правильные несократимые дроби, сумма которых — целое число, а если каждую из этих дробей «перевернуть» (то есть заменить на обратную), то сумма полученных дробей тоже будет целым числом.

б) То же, но числители дробей — не равные друг другу натуральные числа.

12. (*Математический праздник, 2000, 7.2*) Карлсон написал дробь 10/97. Малыш может: 1) прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно; 2) умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число.

Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь,

а) равную 1/2?

б) равную 1?

а) Да; б) нет

13. (*«Курчатов», 2015, 7.3*) Ученику дано число x, записанное как обыкновенная дробь со знаменателем 7. Он вычислил три новых числа $2x$, $3x$ и $4x$. Каждое из трёх новых чисел ученик округлил до ближайшего целого и результаты сложил. Получилось 100. Найдите x. (Число округляется в меньшую сторону, если его дробная часть меньше 1/2, и в большую, если дробная часть больше либо равна 1/2.)

$\frac{78}{7}$

14. (*Московская устная олимпиада, 2016, 7.3*) Мальвина записала по порядку 2016 обыкновенных правильных дробей: 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 2/4, 3/4, … (в том числе и сократимые). Дроби, значение которых меньше чем 1/2, она покрасила в красный цвет, а остальные дроби — в синий. На сколько количество красных дробей меньше количества синих?

На 32

15. (*Математический праздник, 2016, 7.4*) Впишите вместо звёздочек шесть различных цифр так, чтобы все дроби были несократимыми, а равенство верным:

$$\frac{*}{*} + \frac{*}{*} = \frac{*}{*}\,.$$