Доказательство неравенств (new)

Данный листок является продолжением пособия «Доказательство неравенств», которое больше не модифицируется по техническим причинам[1].

1. (*Всеросс., 2018, РЭ, 9.5*) Числа x, y и z удовлетворяют условию $x^2+y^2+z^2=1$. Докажите, что

$$(x-y)(y-z)(x-z)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

2. (*Всеросс., 2018, финал, 9.3*) Пусть a_1, …, a_{25} — целые неотрицательные числа, а k — наименьшее из них. Докажите, что

$$[\sqrt{a_1}\,]+[\sqrt{a_2}\,]+\ldots+[\sqrt{a_{25}}\,]\geqslant\left[\sqrt{a_1+\ldots+a_{25}+200k}\,\right].$$

(Как обычно, через $[x]$ обозначается целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

3. (*Всеросс., 2018, РЭ, 10.3*) Положительные числа x, y таковы, что $x^5-y^3\geqslant 2x$. Докажите, что $x^3\geqslant 2y$.

4. (*«Высшая проба», 2017, 10–11*) Числа P_1, …, P_n являются перестановкой чисел $\{1,\ldots,n\}$ (то есть каждое P_i равно одному из 1, …, n и все P_i различны). Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{P_i+P_{i+1}}>\frac{n-1}{n+2}\,.$$

5. (*Всеросс., 2018, финал, 11.2*) Даны положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $n\geqslant 2$. Докажите, что

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2}+\frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3}+\ldots+\frac{1+x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}x_n}+\frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1}\geqslant n.$$

[1]Так уж вышло, что оказался утрачен исходный tex-файл. Набирать всё это заново у меня нет возможности. Если кто желает поучаствовать в восстановлении документа — пишите.