Доказательство неравенств

Задачи, в которых требуется доказать неравенство, регулярно встречаются на олимпиадах высокого уровня. Цель настоящего пособия — познакомить читателя с различными приёмами доказательства неравенств.

Оглавление

Глава 1

Преобразования неравенств

Для решения задач данной главы нет необходимости привлекать классические неравенства (Коши и пр.). Достаточно уметь выполнять алгебраические преобразования и помнить о том, что сумма квадратов неотрицательна. В некоторых случаях нужно использовать монотонность степенной функции $y = x^n$.

1.1 Алгебраические преобразования

Задача 1.1. (*Транснеравенство*) Пусть $x_1 < x_2$ и $y_1 < y_2$. Докажите, что

$$x_1y_1 + x_2y_2 > x_1y_2 + x_2y_1.$$

Задача 1.2. (*Олимпиада им. Эйлера, 2012, регион*) 1000 различных положительных чисел записаны в ряд в порядке возрастания. Вася разбил эти числа на 500 пар соседних и нашел суммы чисел во всех парах. Петя разбил эти же числа на 500 пар таким образом, что между числами в каждой паре стоит ровно три других числа, и тоже нашел суммы чисел во всех парах. Докажите, что произведение сумм, найденных Петей, больше, чем произведение сумм, найденных Васей.

Задача 1.3. (*Олимпиада им. Эйлера, 2013, финал*) Каждое из чисел x, y и z не меньше 0 и не больше 1. Докажите неравенство

$$\frac{x^2}{1+x+xyz} + \frac{y^2}{1+y+xyz} + \frac{z^2}{1+z+xyz} \leqslant 1.$$

Задача 1.4. (*USAMO, 1997*) Prove that, for all positive real numbers a, b, c, the inequality

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant \frac{1}{abc}$$

holds.

Задача 1.5. (*Всеросс., 1993, округ, 9*) Докажите, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство

$$a^2 + ab + b^2 \geqslant 3(a+b-1).$$

Задача 1.6. (*Всеросс., 2004, округ, 9*) Положительные числа x, y, z таковы, что модуль разности любых двух из них меньше 2. Докажите, что

$$\sqrt{xy+1}+\sqrt{yz+1}+\sqrt{zx+1} > x+y+z.$$

Задача 1.7. (*Всеросс., 2012, регион, 11*) Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство

$$(n-1)^{n+1}(n+1)^{n-1} < n^{2n}.$$

Задача 1.8. (*Всеросс., 2012, регион, 9*) Числа a и b таковы, что $a^3-b^3=2$, $a^5-b^5 \geqslant 4$. Докажите, что $a^2+b^2 \geqslant 2$.

Задача 1.9. (*Всеросс., 2011, регион, 9*) Даны положительные числа x, y, z. Докажите неравенство

$$\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{z+1}+\frac{z+1}{x+1} \leqslant \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}.$$

Задача 1.10. (*Всеросс., 2008, округ, 11*) Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0$ и

$$\frac{x_1}{\sqrt{1}}+\frac{x_2}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{n}}=1.$$

Докажите, что $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \leqslant 1$.

Задача 1.11. (*Всеросс., 2005, финал, 9*) Сумма чисел a_1, a_2, a_3, каждое из которых больше единицы, равна S, причём

$$\frac{a_i^2}{a_i-1} > S$$

для любого $i=1,2,3$. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_2+a_3}+\frac{1}{a_3+a_1} > 1.$$

Задача 1.12. (*Всеросс., 2004, финал, 9–10*) Даны натуральное число $n>3$ и положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, произведение которых равно 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1.$$

Задача 1.13. (*Всеросс., 2008, финал, 10*) Найдите все такие тройки действительных чисел x, y, z, что

$$1+x^4 \leqslant 2(y-z)^2, \quad 1+y^4 \leqslant 2(z-x)^2, \quad 1+z^4 \leqslant 2(x-y)^2.$$

Все перестановки тройки $(-1,0,1)$

Задача 1.14. (*IMO, 2008*) Prove the inequality

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1$$

for real numbers $x, y, z \neq 1$ satisfying the condition $xyz=1$.

1.2 Умножение неравенств

Задача 1.15. (*Олимпиада им. Эйлера, 2015, финал*) По кругу написаны 2015 положительных чисел. Сумма любых двух рядом стоящих чисел больше суммы обратных к двум следующим за ними по часовой стрелке. Докажите, что произведение всех этих чисел больше 1.

Задача 1.16. (*Всеросс., 2011, регион, 11*) Даны положительные числа b и c. Докажите неравенство

$$(b-c)^{2011}(b+c)^{2011}(c-b)^{2011} \geqslant \left(b^{2011}-c^{2011}\right)\left(b^{2011}+c^{2011}\right)\left(c^{2011}-b^{2011}\right).$$

Задача 1.17. Для любых $x, y, z > 0$ докажите, что

$$(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \leqslant xyz.$$

Какова геометрическая интерпретация данного неравенства?

Задача 1.18. (*IMO, 2000*) A, B, C are positive reals with product 1. Prove that

$$\left(A-1+\frac{1}{B}\right)\left(B-1+\frac{1}{C}\right)\left(C-1+\frac{1}{A}\right) \leqslant 1.$$

Задача 1.19. (*Всеросс., 2014, регион, 9*) Какое из чисел больше: $(100!)!$ или $99!^{100!} \cdot 100!^{99!}$? (Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.)

Второе

1.3 Монотонность

При доказательстве неравенств могут оказаться полезными следующие простые факты. Если a и b — положительные числа, m и n — натуральные, то

- $a^n - b^n$ имеет тот же знак, что и $a-b$;
- $(a^m-b^m)(a^n-b^n) \geqslant 0$.

Задача 1.20. (*Всеросс., 1999, округ, 9, 11*) Произведение положительных чисел x, y и z равно 1. Докажите, что если

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant x+y+z,$$

то для любого натурального k выполнено неравенство

$$\frac{1}{x^k}+\frac{1}{y^k}+\frac{1}{z^k} \geqslant x^k+y^k+z^k.$$

Задача 1.21. (*Всеросс., 2007, округ, 10*) Для вещественных $x > y > 0$ и натуральных $n > k$ докажите неравенство

$$(x^k-y^k)^n < (x^n-y^n)^k.$$

Задача 1.22. (*IMO, 1996, Short List*) Consider three positive real numbers x, y, z whose product is 1. Prove that

$$\frac{xy}{x^5+xy+y^5}+\frac{yz}{y^5+yz+z^5}+\frac{zx}{z^5+zx+x^5} \leqslant 1.$$

1.4 Неравенства между средними (начало)

Задача 1.23. а) Для любых $a, b > 0$ докажите, что

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,.$$

б) *Средним квадратичным* чисел a_1, a_2, …, a_n называется число

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}\,.$$

Докажите, что среднее арифметическое положительных чисел не превосходит их среднего квадратичного:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}\,.$$

Задача 1.24. (*Tuymaada, 2013*) For every positive real numbers a and b prove the inequality

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{3}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{2}{3}\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\,.$$

Глава 2

Классические неравенства

2.1 Неравенство Коши

Неравенство Коши — это неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Частные случаи

Сначала рассмотрим неравенство Коши для случаев $n = 2, 3, 4$.

Задача 2.1. Для любых $a, b > 0$ докажите, что

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Задача 2.2. Для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, удовлетворяющих условию $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, докажите, что

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

Задача 2.3. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc.$$

Задача 2.4. Докажите, что если x, y по модулю меньше 1, то

$$\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} \geqslant \frac{2}{1-xy}$$

Задача 2.5. Для любых $a, b > 0$, удовлетворяющих условию $ab = 1$, докажите, что

$$\frac{a}{a^2+3} + \frac{b}{b^2+3} \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

Задача 2.6. (*Всеросс., 1995, округ, 9*) Докажите, что для любых положительных чисел x и y справедливо неравенство

$$\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{y^4+x^2} \leqslant \frac{1}{xy}\,.$$

Задача 2.7. (*Олимпиада им. Эйлера, 2016, финал*) Сумма неотрицательных чисел a, b, c и d равна 4. Докажите, что
$$(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc) \leqslant 8.$$

Задача 2.8. (*Всеросс., 2015, регион, 9*) Числа a, b, c и d таковы, что $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Докажите, что $(2+a)(2+b) \geqslant cd$.

Задача 2.9. (*Всеросс., 1993, округ, 10*) Решите в положительных числах систему уравнений
$$\begin{cases} x_1+\dfrac{1}{x_2}=4, \\ x_2+\dfrac{1}{x_3}=1, \\ x_3+\dfrac{1}{x_4}=4, \\ \ldots \\ x_{99}+\dfrac{1}{x_{100}}=4, \\ x_{100}+\dfrac{1}{x_1}=1. \end{cases}$$

Задача 2.10. (*Всеросс., 2005, округ, 10*) Докажите, что для любого $x>0$ и натурального n выполнено неравенство
$$1+x^{n+1} \geqslant \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}\,.$$

Задача 2.11. (*Всеросс., 2000, округ, 11*) Для неотрицательных чисел x и y, не превосходящих 1, докажите, что
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{1+xy}}\,.$$

Задача 2.12. (*Всеросс., 1999, финал, 10*) Для некоторых положительных чисел x и y выполняется неравенство $x^2+y^3 \geqslant x^3+y^4$. Докажите, что $x^3+y^3 \leqslant 2$.

Задача 2.13. Для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ докажите, что
$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca.$$

Задача 2.14. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что
$$a^3+b^3+c^3+ab^2+bc^2+ca^2 \geqslant 2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right).$$

Задача 2.15. Для любых $a, b, c > 0$, удовлетворяющих условию $a+b+c=3$, докажите, что
$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \geqslant 6.$$

Задача 2.16. (*Всеросс., 1996, округ, 10*) Докажите, что если a, b, c — положительные числа и $ab+bc+ca > a+b+c$, то $a+b+c > 3$.

Задача 2.17. (*Всеросс., 2016, регион, 11*) Положительные числа x, y и z удовлетворяют условию $xyz \geqslant xy + yz + zx$. Докажите неравенство

$$\sqrt{xyz} \geqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\,.$$

Задача 2.18. Для любых $a, b, c > 0$, удовлетворяющих условию $a + b + c = 1$, докажите, что

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geqslant 1.$$

Задача 2.19. (*Моск. матем. регата, 2011, 10*) Докажите, что если $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, то

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geqslant \sqrt{3},$$

и укажите, в каком случае достигается равенство.

Задача 2.20. Для любых $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant a(b + c + d).$$

Задача 2.21. (*Всеросс., 2015, регион, 10–11*) Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geqslant 2\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right).$$

Задача 2.22. Докажите неравенство Коши для $n = 4$, используя уже доказанное неравенство Коши для $n = 2$.

Задача 2.23. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

Задача 2.24. (*Всеросс., 2006, округ, 9*) Известно, что $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2 = 6$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 0$. Докажите, что $x_1x_2\ldots x_6 \leqslant \frac{1}{2}$.

Задача 2.25. (*Tuymaada, 2014*) Positive numbers a, b, c satisfy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Prove the inequality

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{c^3+1}} \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}\,.$$

Задача 2.26. (*Всеросс., 2013, финал, 11*) Положительные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $2(a + b + c + d) \geqslant abcd$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant abcd$.

Задача 2.27. Докажите неравенство Коши для $n = 3$ двумя способами:

1) из неравенства задачи 2.13 получите неравенство $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$;
2) выведите неравенство Коши для $n = 3$ из уже доказанного неравенства Коши для $n = 4$.

Задача 2.28. Для любых $a, b > 0$ докажите, что

$$2a^3 + b^3 \geqslant 3a^2b.$$

Задача 2.29. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2a.$$

Задача 2.30. Для любых $a, b, c > 0$, удовлетворяющих условию $a + b + c = 1$, докажите, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqslant 3 + \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc}.$$

Задача 2.31. Для любых $a, b, c > 0$, удовлетворяющих условию $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, докажите, что

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geqslant 64.$$

Задача 2.32. (*ММО, 2008, окружной тур, 10*) Произведение положительных чисел x, y и z равно 1. Докажите, что $(2 + x)(2 + y)(2 + z) \geqslant 27$.

Задача 2.33. (*Неравенство Несбитта*) Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Задача 2.34. Для любых $a, b, c, d > 0$ докажите, что

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + d} + \frac{c}{d + a} + \frac{d}{a + b} \geqslant 2.$$

Задача 2.35. (*USAMO, 2011*) Let a, b, c be positive real numbers such that

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \leqslant 4.$$

Prove that

$$\frac{ab + 1}{(a + b)^2} + \frac{bc + 1}{(b + c)^2} + \frac{ca + 1}{(c + a)^2} \geqslant 3.$$

Задача 2.36. (*Всеросс., 2016, финал, 9*) Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \leqslant \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

Задача 2.37. (*Всеросс., 2016, финал, 11*) Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \leqslant \frac{1}{a^3b^3c^3d^3}.$$

Задача 2.38. (*Всеросс., 2002, финал, 10*) Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите, что

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant ab + bc + ca.$$

Задача 2.39. (*Всеросс., 2015, финал, 11*) Действительные числа a, b, c, d, по модулю большие единицы, удовлетворяют соотношению

$$abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

Задача 2.40. (*Tuymaada, 2013*) Prove that if x, y, z are positive real numbers and $xyz = 1$ then

$$\frac{x^3}{x^2+y} + \frac{y^3}{y^2+z} + \frac{z^3}{z^2+x} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Задача 2.41. (*IMO, 1998, Short List*) Let x, y, z be positive real numbers such that $xyz = 1$. Prove that

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Задача 2.42. (*APMO, 1998*) Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) \geqslant 2 + \frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Задача 2.43. (*IMO, 2006*) Determine the least real number M such that the inequality

$$\left|ab\left(a^2-b^2\right) + bc\left(b^2-c^2\right) + ca\left(c^2-a^2\right)\right| \leqslant M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

holds for all real numbers a, b and c.

Общий случай

Теперь докажем неравенство Коши для произвольного n. Традиционное доказательство по индукции принадлежит Коши и изложено во многих пособиях (см., например, [1]–[3]).

Задача 2.44. Базой индукции является уже доказанный случай $n = 2$. Далее нужно сделать две вещи.

1) Предполагая, что неравенство Коши справедливо для $n = k$, докажите, что оно справедливо для $n = 2k$ (это аналог задачи 2.22).

2) Предполагая, что неравенство Коши справедливо для $n = k$, докажите, что оно справедливо для $n = k - 1$ (это аналог пункта 2 задачи 2.27).

Объясните, почему неравенство Коши тем самым доказано для любого n.

Ещё одно доказательство неравенства Коши основано на так называемом методе сглаживания (smoothing, [4]). Суть метода заключается в том, что старые значения x_i и x_j заменяются на новые значения x_i' и x_j' с той же суммой, но расположенные ближе друг к другу, отчего произведение увеличивается. В результате, сохраняя неизменным среднее арифметическое, мы монотонно увеличиваем среднее геометрическое, и через конечное число шагов они оказываются равны друг другу. Это и означает, что среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического. Подробности — в следующей задаче.

Задача 2.45. 1) Пусть a — среднее арифметическое чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причём не все эти числа равны a. Докажите, что найдутся x_i и x_j такие, что $x_i < a < x_j$.

2) Обозначим $x'_i = a$, $x'_j = x_i + x_j - a$. Покажите, что $x'_i x'_j > x_i x_j$, после чего завершите доказательство неравенства Коши.

Задача 2.46. Для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ докажите, что

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

Задача 2.47. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$a^5 + b^5 + c^5 \geqslant a^4 b + b^4 c + c^4 a.$$

Задача 2.48. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$a^5 + b^5 + c^5 \geqslant abc(ab + bc + ca).$$

Задача 2.49. Для любых $a, b, c > 0$, удовлетворяющих условию $abc = 1$, докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant a + b + c.$$

Задача 2.50. Для любых $a, b, c, d > 0$ докажите, что

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geqslant a + b + c + d.$$

Задача 2.51. (*ММО, 1997, 11*) Положительные числа a, b и c таковы, что $abc = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leqslant 1.$$

Задача 2.52. (*Всеросс., 2007, округ, 11*) Для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенство

$$(1+x_1)(1+x_1+x_2)\ldots(1+x_1+x_2+\ldots+x_n) \geqslant \sqrt{(n+1)^{n+1}} \cdot \sqrt{x_1 x_2 \ldots x_n}\,.$$

2.2 Неравенство Коши — Буняковского — Шварца

Начнём с известной вам геометрической ситуации. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два произвольных вектора на плоскости. Скалярное произведение данных векторов по абсолютной величине не превосходит произведения их длин:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|,$$

поскольку $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$, где φ — угол между векторами.

Теперь запишем это неравенство в координатах. Рассмотрим на плоскости прямоугольную декартову систему координат, и пусть $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — единичные базисные векторы, направленные вдоль координатных осей. Тогда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно разложить по базисным векторам:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}, \quad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j},$$

причём длины векторов и скалярное произведение выражаются через координаты векторов — числа a_1, a_2, b_1, b_2 — следующим образом:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

В результате наше неравенство примет вид

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$

или

$$\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right) \geqslant \left(a_1 b_1 + a_2 b_2\right)^2.$$

Это и есть неравенство Коши — Буняковского — Шварца (КБШ) в простейшем случае $n = 2$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда координаты векторов пропорциональны: $a_1/b_1 = a_2/b_2$. Действительно, пропорциональность координат равносильна коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть условию $\cos\varphi = \pm 1$ или $\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm|\vec{a}||\vec{b}|$.

Если провести аналогичные рассуждения с векторами в трёхмерном пространстве, то получится неравенство КБШ для $n = 3$:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) \geqslant \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\right)^2.$$

Равенство достигается при $a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3$.

В общем случае неравенство Коши — Буняковского — Шварца[1] имеет вид

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) \geqslant \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)^2$$

для любых двух наборов действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда эти наборы пропорциональны: $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \ldots = a_n/b_n$ (в записи пропорциональности мы допускаем нуль в знаменателе, когда нуль присутствует и в соответствующем числителе).

Для положительных чисел $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ неравенство КБШ можно переписать в следующем виде:

$$(x_1 + \ldots + x_n)(y_1 + \ldots + y_n) \geqslant \left(\sqrt{x_1 y_1} + \ldots + \sqrt{x_n y_n}\,\right)^2.$$

Задача 2.53. Неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2 \geqslant 0$$

выполняется, очевидно, для всех x. Выведите отсюда неравенство КБШ.

Задача 2.54. Пусть $A^2 = \sum a_i^2$ и $B^2 = \sum b_i^2$. Запишите неравенство Коши для двух чисел a_i^2/A^2 и b_i^2/B^2. Выведите отсюда неравенство КБШ.

Задача 2.55. (*Titu's Lemma*[2]) Непосредственным вычислением убедитесь, что для любых действительных чисел x_i, y_i ($y_i > 0$) выполнено

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} \geqslant \frac{(x_1 + x_2)^2}{y_1 + y_2},$$

[1] В англоязычной литературе оно называется *Cauchy-Schwarz inequality* или просто CS.

[2] Титу Андрееску — румынский и американский математик, тренер сборной США и автор многих задач на Международной математической олимпиаде. Говорят [6], что он обнаружил это неравенство в 2001 году. В современной англоязычной литературе для данного неравенства общеприняты названия *Titu's Lemma* или *Engel Form of the CS*, хотя в руководстве [3] оно названо *неравенством Шварца*.

после чего докажите по индукции, что

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{y_n}\geqslant\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{y_1+y_2+\ldots+y_n}\,.$$

Когда достигается равенство?

Задача 2.56. Выведите лемму Титу из неравенства КБШ.

Неравенство Коши — Буняковского — Шварца и лемма Титу являются очень мощным оружием, и надо непременно научиться ими пользоваться. Оставшиеся задачи данного раздела (в том числе и те, которые встречались раньше) нужно решить с помощью неравенства КБШ или леммы Титу.

Задача 2.57. Для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ докажите, что

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)\geqslant(a+b+c)^2.$$

Задача 2.58. Для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ докажите, что

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_1}\geqslant a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Задача 2.59. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\,.$$

Задача 2.60. Докажите неравенства задач 2.13, 2.46, 2.50.

Задача 2.61. Выведите неравенство Несбитта (задача 2.33): а) из неравенства КБШ, предъявив соответствующие векторы; б) из леммы Титу.

Задача 2.62. ([2]) For nonnegative real numbers x, y, z prove that

$$\sqrt{3x^2+xy}+\sqrt{3y^2+yz}+\sqrt{3z^2+zx}\leqslant 2(x+y+z).$$

Задача 2.63. ([2]) For positive real numbers a, b, c prove that

$$\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}\geqslant 1.$$

Задача 2.64. ([2]) For positive real numbers a, b, c prove that

$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+2c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+2a}\right)^2\geqslant\frac{1}{3}\,.$$

Задача 2.65. (*RMO, 2013*; [6]) Let a, b, c, d, e be positive real numbers, each > 1. Prove that the following inequality holds:

$$\frac{a^2}{c-1}+\frac{b^2}{d-1}+\frac{c^2}{e-1}+\frac{d^2}{a-1}+\frac{e^2}{b-1}\geqslant 20.$$

Задача 2.66. (*Croatia, 2004*; [6]) Let a, b, c be positive real numbers. Prove that
$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+a)(b+c)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\geqslant\frac{3}{4}\,.$$

Задача 2.67. (*Japan TST, 2004*) Let a, b, c be positive real numbers with sum 1. Prove that
$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\leqslant\frac{2a}{b}+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{a}\,.$$

Задача 2.68. В некоторых ситуациях, к которым приводит лемма Титу, может оказаться полезным следующее элементарное наблюдение. Пусть A, B, λ, μ — положительные числа (часто оказывается, например, что $A=a^2+b^2+c^2$ и $B=ab+bc+ca$). Покажите, что знак выражения
$$\frac{A+\lambda B}{A+\mu B}-\frac{1+\lambda}{1+\mu}$$
совпадает со знаком выражения $(\mu-\lambda)(A-B)$.

Задача 2.69. (*USAJMO, 2012*) Let a, b, c be positive real numbers. Prove that
$$\frac{a^3+3b^3}{5a+b}+\frac{b^3+3c^3}{5b+c}+\frac{c^3+3a^3}{5c+a}\geqslant\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Задача 2.70. (*IMO, 1995*) Let a, b, c be positive real numbers such that $abc=1$. Prove that
$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}\,.$$

Задача 2.71. ([6]) Let a, b, c be positive real numbers such that $abc=1$. Prove that
$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}\,.$$

Задача 2.72. (*IZhO, 2008*) Докажите, что для любых положительных действительных чисел a, b, c таких, что $abc=1$, выполнено неравенство
$$\frac{1}{(a+b)b}+\frac{1}{(b+c)c}+\frac{1}{(c+a)a}\geqslant\frac{3}{2}\,.$$

Задача 2.73. ([3]) Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство
$$\frac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2-ca}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{c^2-ab}{2c^2+a^2+b^2}\geqslant 0.$$

Задача 2.74. (*Tuymaada, 2012*) Prove that for any real numbers a, b, c satisfying $abc=1$ the following inequality holds
$$\frac{1}{2a^2+b^2+3}+\frac{1}{2b^2+c^2+3}+\frac{1}{2c^2+a^2+3}\leqslant\frac{1}{2}\,.$$

Задача 2.75. (*IMO, 2005*) Let x, y, z be three positive reals such that $xyz\geqslant 1$. Prove that
$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5}\geqslant 0.$$

2.3 Неравенство Гёльдера

Неравенство Гёльдера служит обобщением неравенства Коши — Буняковского — Шварца. Мы ограничимся здесь частным случаем неравенства Гёльдера, достаточным для доказательства многих олимпиадных неравенств (включая IMO).

Задача 2.76. Действуя аналогично выводу неравенства КБШ в задаче 2.54, докажите, что для трёх наборов положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ справедливо неравенство

$$\left(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3\right)\left(b_1^3 + b_2^3 + \ldots + b_n^3\right)\left(c_1^3 + c_2^3 + \ldots + c_n^3\right) \geqslant \left(a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \ldots + a_n b_n c_n\right)^3.$$

Это и есть *неравенство Гёльдера* (точнее, его вышеупомянутый частный случай). Его можно переписать в следующем виде:

$$(x_1 + \ldots + x_n)(y_1 + \ldots + y_n)(z_1 + \ldots + z_n) \geqslant \left(\sqrt[3]{x_1 y_1 z_1} + \ldots + \sqrt[3]{x_n y_n z_n}\,\right)^3.$$

Задача 2.77. Выведите неравенство задачи 2.58 из неравенства Гёльдера.

Задача 2.78. Продолжая указанную аналогию, запишите и докажите неравенство Гёльдера для четырёх наборов переменных.

Задача 2.79. Для любых положительных чисел a, b, c, x, y, z докажите, что

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geqslant \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}.$$

Задача 2.80. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a^6}{b^2+c^2} + \frac{b^6}{c^2+a^2} + \frac{c^6}{a^2+b^2} \geqslant \frac{1}{2}abc(a+b+c).$$

Задача 2.81. (*Всеукр., 2006*) Пусть x, y и z — положительные числа, такие, что $xy+yz+zx = 1$. Докажите, что

$$\frac{x^3}{1+9y^2xz} + \frac{y^3}{1+9z^2xy} + \frac{z^3}{1+9x^2yz} \geqslant \frac{(x+y+z)^3}{18}.$$

Задача 2.82. (*Balkan MO*) Prove that for all positive real numbers a, b, c

$$\frac{1}{a(b+c)} + \frac{1}{b(c+a)} + \frac{1}{c(a+b)} \geqslant \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Задача 2.83. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \geqslant \sqrt{a+b+c}.$$

Задача 2.84. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+2c^2}} + \frac{bc}{\sqrt{bc+2a^2}} + \frac{ca}{\sqrt{ca+2b^2}} \geqslant \sqrt{ab+bc+ca}.$$

Задача 2.85. (*IMO, 2001*) Prove that

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1$$

for all positive real numbers a, b and c.

Задача 2.86. (*USA TST, 2010*) Let a, b, c be positive reals such that $abc = 1$. Show that

$$\frac{1}{a^5(b+2c)^2}+\frac{1}{b^5(c+2a)^2}+\frac{1}{c^5(a+2b)^2}\geqslant \frac{1}{3}\,.$$

Задача 2.87. (*IMO, 2004, Short List*) If a, b, c are three positive real numbers such that $ab+bc+$ $+ca = 1$, prove that

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\leqslant \frac{1}{abc}\,.$$

2.4 Транснеравенство

Напомним понятие центра масс. Расположим массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$ в точках координатной прямой с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Центром масс* полученной системы называется точка с координатой

$$x_c = \frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}\,.$$

Теперь рассмотрим возрастающую последовательность координат

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$$

и возрастающую последовательность масс

$$m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_n.$$

Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ — некоторая перестановка масс $m_1, m_2, \ldots, m_n$:

$$\mu_1 = m_{i_1},\ \mu_2 = m_{i_2},\ \ldots,\ \mu_n = m_{i_n}.$$

Поместим массы $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ в точки с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно. Центр масс окажется в точке

$$x_c(\mu) = \frac{x_1\mu_1+x_2\mu_2+\ldots+x_n\mu_n}{M}\,,$$

где $M = \mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n = m_1+m_2+\ldots+m_n$. Нас интересует вопрос: для какой перестановки масс центр масс $x_c(\mu)$ расположен правее всего, а для какой — левее всего?

Интуитивно понятно, что центр масс займёт самое правое положение, если массы расположены по возрастанию, и самое левое положение — если массы расположены по убыванию:

$$\frac{x_1m_n+x_2m_{n-1}+\ldots+x_1m_1}{M}\leqslant x_c(\mu)\leqslant \frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_nm_n}{M}\,,$$

или

$$x_1m_n+x_2m_{n-1}+\ldots+x_1m_1 \leqslant x_1\mu_1+x_2\mu_2+\ldots+x_n\mu_n \leqslant x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_nm_n.$$

Это и есть *транснеравенство*.

Задача 2.88. Пусть $x_1 \leqslant x_2$ и $y_1 \leqslant y_2$. Докажите, что $x_1y_2 + x_2y_1 \leqslant x_1y_1 + x_2y_2$.

Задача 2.89. (*Транснеравенство*) Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — возрастающие последовательности:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n, \quad y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n.$$

Докажите, что для любой перестановки $u_1, u_2, \ldots, u_n$ членов последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_n$ справедливо неравенство

$$x_1y_n + x_2y_{n-1} + \ldots + x_1y_1 \leqslant x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n \leqslant x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Иными словами, «скалярное произведение» последовательностей максимально (по всем перестановкам их членов), когда эти последовательности упорядочены одинаково, и минимально, когда они упорядочены противоположно.

Задача 2.90. (*Высшая проба, 2013, 11*) Вместо крестиков в выражении

$$\times \cdot \times + \times \cdot \times + \ldots + \times \cdot \times$$

(50 слагаемых) расставили числа 1, …, 100, каждое по одному разу. Какое максимальное и минимальное значение может иметь полученное выражение?

$\boxed{169150 \text{ и } 85850}$

Транснеравенство можно использовать при доказательстве *симметричных* неравенств (не меняющихся при любой перестановке переменных), хотя, казалось бы, об упорядоченности значений переменных в условии ничего не сказано. Приём состоит в следующем. Пусть, например, нужно доказать симметричное неравенство вида $f(a, b, c) \geqslant 0$. Так как перестановки переменных ничего не меняют, можно *без ограничения общности* предположить, что $a \leqslant b \leqslant c$.

Задача 2.91. Пользуясь описанным приёмом, докажите неравенства задач 2.13, 2.29 (и затем неравенство Коши для $n = 3$), 2.23, 2.18, 2.58, 2.33.

Задача 2.92. Выведите из транснеравенства неравенство Коши для $n = 4$.

Задача 2.93. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Задача 2.94. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a}{b(b+c)} + \frac{b}{c(c+a)} + \frac{c}{a(a+b)} \geqslant \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

Задача 2.95. Для любых $a, b, c > 0$, удовлетворяющих условию $abc = 1$, докажите, что

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \geqslant a + b + c.$$

Задача 2.96. Решите задачу 2.70 с помощью транснеравенства.

Задача 2.97. Для любых $a, b, c > 1$ докажите, что $a^ab^bc^c \geqslant a^bb^cc^a$.

Задача 2.98. (*IMO, 1975*) Let x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ be real numbers such that

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \quad \text{and} \quad y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n.$$

Prove that, if $z_1, z_2, \ldots, z_n$ is any permutation of $y_1, y_2, \ldots, y_n$, then

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2.$$

2.5 Неравенство Чебышёва

Снова рассмотрим возрастающую последовательность координат

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n.$$

Если в точках с этими координатами поместить равные массы m, то центр масс совпадёт со средним арифметическим:

$$x_c = \frac{x_1 m + x_2 m + \ldots + x_n m}{nm} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Если же в этих точках расположить массы, взятые в порядке возрастания:

$$m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_n,$$

то интуитивно понятно, что центр масс сместится вправо от среднего арифметического:

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \geqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Последнее неравенство перепишем в виде

$$n(x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n) \geqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(m_1 + m_2 + \ldots + m_n).$$

Это и есть *неравенство Чебышёва.*

Задача 2.99. Пусть $x_1 \leqslant x_2$ и $y_1 \leqslant y_2$. Докажите, что

$$2(x_1 y_1 + x_2 y_2) \geqslant (x_1 + x_2)(y_1 + y_2).$$

Задача 2.100. Пусть $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$ и $y_1 \leqslant y_2 \leqslant y_3$. Докажите, что

$$3(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) \geqslant (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3).$$

Задача 2.101. (*Неравенство Чебышёва*) Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — возрастающие последовательности:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n, \quad y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n.$$

Докажите, что

$$n(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n) \geqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(y_1 + y_2 + \ldots + y_n).$$

Задача 2.102. Выведите неравенство Чебышёва из транснеравенства. *Указание.* В силу транснеравенства имеем $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots x_ny_n \leqslant x_1y_2 + x_2y_3 + \ldots + x_ny_1$. Запишите ещё $n-1$ таких неравенств, полученных циклическими перестановками игреков, и все эти неравенства сложите.

Неравенство Чебышёва используется при доказательстве симметричных неравенств таким же образом, как и транснеравенство: коль скоро симметричное неравенство не меняется при перестановках переменных, мы можем без ограничения общности считать, что значения переменных упорядочены.

Задача 2.103. Докажите неравенства задач 2.57 и 2.93 с помощью неравенства Чебышёва.

Задача 2.104. Пусть $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$ и $0 < x \leqslant y \leqslant z$. Докажите, что

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geqslant \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{xyz}} \geqslant \frac{3(a+b+c)}{x+y+z}\,.$$

Выведите отсюда неравенство Несбитта 2.33.

Задача 2.105. Обобщите неравенство предыдущей задачи на случай n переменных.

Задача 2.106. Пусть $\alpha \geqslant 2$. Для любых $x, y, z > 0$, таких, что $xyz \geqslant 1$, докажите, что

$$\frac{x^\alpha}{y+z} + \frac{y^\alpha}{z+x} + \frac{z^\alpha}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}\,.$$

Задача 2.107. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geqslant a + b + c.$$

Задача 2.108. Пусть последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ противоположно упорядочены:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n, \quad y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n.$$

Докажите, что

$$n(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n) \leqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(y_1 + y_2 + \ldots + y_n).$$

Задача 2.109. *Средним степенным* степени $k \in \mathbb{N}$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется число

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}}\,.$$

Докажите, что среднее арифметическое положительных чисел не превосходит их среднего степенного любой степени $k \geqslant 2$:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k}{n}}\,.$$

Задача 2.110. Для любых $a, b, c > 1$ докажите, что

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

2.6 Неравенство Йенсена

Неравенство Йенсена — простое и очень мощное неравенство. Из него можно получить, в частности, неравенства Коши, Коши — Буняковского — Шварца, Гёльдера и ряд других полезных неравенств.

Определение. Множество на плоскости называется выпуклым, если вместе с любой парой своих точек оно целиком содержит отрезок, их соединяющий.

С каждой функцией $y = f(x)$, определённой на промежутке I, связаны некоторые множества точек координатной плоскости. Именно, наряду с графиком данной функции — множеством

$$\Gamma = \{(x, y) \mid x \in I,\ y = f(x)\}$$

рассмотрим *суперграфик*

$$\Gamma_+ = \{(x, y) \mid x \in I,\ y \geqslant f(x)\}$$

(множество точек, расположенных над графиком, включая сам график). Аналогично определим *субграфик*

$$\Gamma_- = \{(x, y) \mid x \in I,\ y \leqslant f(x)\}.$$

Определение. Функция называется выпуклой, если её суперграфик — выпуклое множество. Функция называется вогнутой, если её субграфик — выпуклое множество.

Задача 2.111. Пусть $a < b$ и $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$. Покажите, что если λ пробегает отрезок $[0; 1]$, то x пробегает отрезок $[a; b]$.

Задача 2.112. Докажите, что функция $y = f(x)$, определённая на промежутке I, является выпуклой тогда и только тогда, когда

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in I$ и любых неотрицательных λ, μ таких, что $\lambda + \mu = 1$. Сформулируйте аналогичный критерий вогнутости функции.

Задача 2.113. Докажите, что $y = x^2$ — выпуклая функция, а $y = \sqrt{x}$ — вогнутая.

Задача 2.114. (*Неравенство Юнга*) Пусть $a, b, p, q > 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab.$$

Выше было дано определение понятия центра масс для системы точек на прямой. Обобщим его на случай системы точек на плоскости.

Определение. Пусть в точках с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) расположены массы m_1, m_2, …, m_n. Центром масс данной системы называется точка с координатами

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \quad y_c = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Задача 2.115. Одну из точек системы назовём красной, а остальные — синими. Покажите, что центр масс данной системы совпадает с центром масс двух точек: красной и центра масс всех синих (в котором помещена масса всех синих точек).

Задача 2.116. Докажите, что центр масс нескольких точек выпуклого множества также принадлежит этому множеству.

Задача 2.117. (*Неравенство Йенсена*) Рассмотрим выпуклую функцию $y = f(x)$, определённую на промежутке I, и числа $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$. Пусть λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n — положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите неравенство Йенсена (обобщение задачи 2.112):

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

В частности,

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

Указание. Поместите массы λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n в точки графика с абсциссами x_1, x_2, $\ldots$, x_n соответственно; воспользуйтесь выпуклостью суперграфика и результатом предыдущей задачи.

Задача 2.118. Что изменится в неравенстве Йенсена, если выпуклую функцию заменить на вогнутую?

Итак, любая выпуклая или вогнутая функция порождает некоторое неравенство (в большей или меньшей степени содержательное). Давайте смотреть, к каким неравенствам приводят известные вам элементарные функции.

Задача 2.119. Пусть $f(x) = x^2$. Какое неравенство получается из неравенства Йенсена?

Задача 2.120. *Средним гармоническим* чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n называется число, обратное среднему арифметическому обратных чисел $1/x_1$, $1/x_2$, $\ldots$, $1/x_n$. Докажите, что среднее гармоническое положительных чисел не превосходит их среднего арифметического:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Замечание. Используются аббревиатуры: AM — среднее арифметическое (arithmetic mean), GM — среднее геометрическое (geometric mean), QM — среднее квадратичное (quadratic mean), HM — среднее гармоническое (harmonic mean). Имеем неравенство между этими четырьмя средними:

$$\mathrm{HM} \leqslant \mathrm{GM} \leqslant \mathrm{AM} \leqslant \mathrm{QM}.$$

Задача 2.121. Пусть $f(x) = e^x$. Выведите из неравенства Йенсена неравенство Коши.

Задача 2.122. Пусть a_1, a_2, $\ldots$, a_n и λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n — положительные числа, причём

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1.$$

Докажите, что

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$$

(это обобщение неравенства Юнга из задачи 2.114).

Выше был рассмотрен частный случай неравенства Гёльдера. Теперь мы можем доказать это неравенство в общем виде.

Задача 2.123. (*Неравенство Гёльдера*) Расмотрим несколько наборов из n положительных чисел:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n; \quad b_1, b_2, \ldots, b_n; \quad \ldots; \quad z_1, z_2, \ldots, z_n.$$

Пусть λ_a, λ_b, …, λ_z — соответствующие данным наборам положительные числа, причём

$$\lambda_a + \lambda_b + \ldots + \lambda_z = 1.$$

Докажите, что

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^{\lambda_a}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^{\lambda_b} \ldots (z_1 + z_2 + \ldots + z_n)^{\lambda_z} \geqslant$$
$$\geqslant a_1^{\lambda_a} b_1^{\lambda_b} \ldots z_1^{\lambda_z} + a_2^{\lambda_a} b_2^{\lambda_b} \ldots z_2^{\lambda_z} \ldots a_n^{\lambda_a} b_n^{\lambda_b} \ldots z_n^{\lambda_z}.$$

Указание. Без ограничения общности полагаем

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \ldots = z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 1$$

(почему?) и используем результат предыдущей задачи.

Задача 2.124. Объясните, как из общего неравенства Гёльдера получается частный случай, доказанный в задаче 2.76.

Задача 2.125. Какое неравенство получится, если записать неравенство Гёльдера для двух наборов a_1, a_2, …, a_n и b_1, b_2, …, b_n, положив при этом $\lambda_a = \lambda_b = 1/2$?

Задача 2.126. Для любых положительных чисел a_1, a_2, …, a_n докажите, что

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leqslant a_1^{a_1} a_2^{a_2} \ldots a_n^{a_n}.$$

Задача 2.127. Пусть $x, y, z > 0$ и $x + y + z = xyz$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{1+zx} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Задача 2.128. Пусть $x, y, z > 0$ и $x + y + z \geqslant 1$. Докажите, что

$$\frac{x\sqrt{x}}{y+z} + \frac{y\sqrt{y}}{z+x} + \frac{z\sqrt{z}}{x+y} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 2.129. (*IMO, Short List*) Let x_1, x_2, …, x_n be positive reals. Prove that

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \leqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}.$$

Задача 2.130. Решите задачу 2.85 с помощью неравенства Йенсена.

Задача 2.131. Пусть $a, b, c, d > 0$ и $a + b + c + d = 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{b^2+b} + \frac{b}{c^2+c} + \frac{c}{d^2+d} + \frac{d}{a^2+a} \geqslant \frac{8}{(a+c)(b+d)}.$$

Задача 2.132. (*IMO, 2009, Short List*) Let a, b, c be positive real numbers such that

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c.$$

Prove that

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(2b+c+a)^2} + \frac{1}{(2c+a+b)^2} \leqslant \frac{3}{16}.$$

2.7 Неравенство между средними степенными

Среднее степенное натуральной степени нам уже встретилось в задаче 2.109. Здесь мы обобщим это понятие на случай произвольной действительной степени.

Пусть r — ненулевое действительное число. *Степенным средним* степени r положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n называется число

$$M_r = \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \ldots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Заметьте, что $M_1 = \mathrm{AM}$, $M_2 = \mathrm{QM}$, $M_{-1} = \mathrm{HM}$ (см. аббревиатуры в задаче 2.120). Определим также

$$M_0 = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Ниже мы покажем, что это определение — по непрерывности, то есть $M_r \to M_0$ при $r \to 0$.

Как мы уже знаем, $M_{-1} \leqslant M_0 \leqslant M_1 \leqslant M_2$. Более того, оказывается, что *среднее степенное M_r является возрастающей функцией величины r.*

Задача 2.133. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ и $\alpha > 1$. Докажите, что

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^{\alpha} \leqslant \frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}.$$

Задача 2.134. Докажите, что $M_r \leqslant M_s$ в случаях $0 < r < s$ и $r < s < 0$.

Задача 2.135. Докажите, что

$$\lim_{r\to 0} M_r = M_0.$$

Задача 2.136. (*Всеросс., 2003, финал, 9*) Пусть a, b, c — положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geqslant \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

Задача 2.137. Задача 2.25 имеет короткое решение через средние степенные. Найдите его.

Полученные результаты обобщаются на случай взвешенных средних степенных. Именно, наряду с введёнными обозначениями рассмотрим положительные числа (веса) λ_1, λ_2, ..., λ_n, для которых $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$. Определим *взвешенное среднее степенное* степени r:

$$M_r^\lambda = \begin{cases} (\lambda_1 a_1^r + \lambda_2 a_2^r + \ldots + \lambda_n a_n^r)^{\frac{1}{r}}, & \text{если } r \neq 0; \\ a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}, & \text{если } r = 0. \end{cases}$$

Задача 2.138. Для величины M_r^λ докажите утверждения, аналогичные задачам 2.134 и 2.135.

Задача 2.139. (*Taiwan TST*) Let a, b, c be positive reals. Prove that

$$3(a+b+c) \geqslant 8\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

Глава 3

Геометрические неравенства

3.1 Алгебраические преобразования

Задача 3.1. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, p — его полупериметр, S — его площадь. Докажите неравенства:

а) $3\,(a^2+b^2+c^2) \geqslant 4p^2$;

б) $p^2 \geqslant 3\sqrt{3}\,S$.

Задача 3.2. (*IMO, 1961*) Let a, b, c be the sides of a triangle, and T its area. Prove:

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\,T.$$

In what case does equality hold?

3.2 Неравенство треугольника

Задача 3.3. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите, что

$$a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca).$$

Задача 3.4. (*ММО, 2002, 9*) Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство

$$a^3+b^3+3abc > c^3.$$

Задача 3.5. (*ММО, 1999, 11*) a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2} > 3.$$

Задача 3.6. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \geqslant 3.$$

Задача 3.7. (*IMO, 1964*) Suppose a, b, c are the sides of a triangle. Prove that

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqslant 3abc.$$

Задача 3.8. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника с периметром 3. Докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{a+b-c}}+\frac{1}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{1}{\sqrt{c+a-b}} \geqslant \frac{9}{ab+bc+ca}\,.$$

Задача 3.9. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$(a+b-c)^a(b+c-a)^b(c+a-b)^c \leqslant a^a b^b c^c.$$

3.3 Неравенства с медианами

Задача 3.10. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, m_c — медиана к стороне c. Докажите неравенство

$$\frac{a+b-c}{2} < m_c < \frac{a+b}{2}\,.$$

Задача 3.11. Докажите, что сумма медиан треугольника больше $3/4$ периметра и меньше периметра.

Задача 3.12. Докажите, что большей стороне треугольника соответствует меньшая медиана.

Задача 3.13. Докажите неравенства:

$$\text{а) } a^2+b^2 \geqslant \frac{c^2}{2}\,; \quad \text{б) } m_a^2+m_b^2 \geqslant \frac{9c^2}{8}\,.$$

Задача 3.14. (*Всеросс., 1994, финал, 10*) Пусть a, b и c — стороны треугольника, m_a, m_b и m_c — медианы, проведённые к этим сторонам, D — диаметр окружности, описанной около треугольника. Докажите, что

$$\frac{a^2+b^2}{m_c}+\frac{b^2+c^2}{m_a}+\frac{c^2+a^2}{m_b} \leqslant 6D.$$

Задача 3.15. (*Теорема Лейбница о медианах*) Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что для любой точки X выполнено равенство

$$AX^2+BX^2+CX^2 = AM^2+BM^2+CM^2+3MX^2.$$

Задача 3.16. Докажите, что для любой точки X справедливо неравенство

$$AX^2+BX^2+CX^2 \geqslant \frac{1}{3}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right).$$

В каком случае достигается равенство?

Задача 3.17. Докажите неравенства:

$$\text{а) } m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leqslant \frac{27R^2}{4}\,; \quad \text{б) } m_a + m_b + m_c \leqslant \frac{9R}{2}\,.$$

3.4 Неравенства с биссектрисами

Задача 3.18. Докажите, что

$$\text{а) } l_a = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}\,; \quad \text{б) } l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}\,.$$

Задача 3.19. Докажите, что большему углу треугольника отвечает меньшая биссектриса.

Задача 3.20. Докажите неравенство

$$l_a \leqslant \sqrt{p(p-a)}.$$

Задача 3.21. Докажите неравенства:

$$\text{а) } l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leqslant p^2; \quad \text{б) } l_a + l_b + l_c \leqslant p\sqrt{3}\,.$$

Задача 3.22. (*Всеросс. по геометрии, 2011, 10*) Докажите, что для любого неравнобедренного треугольника

$$l_1^2 > S\sqrt{3} > l_2^2$$

где l_1 и l_2 — наибольшая и наименьшая биссектрисы треугольника, S — его площадь.

Литература

[1] Ю. П. Соловьёв. Неравенства. МЦНМО, 2005.

[2] Samin Riasat. Basics of Olympiad Inequalities. 2008.

[3] Pham Kim Hung. Secrets in Inequalities. V. 1–2. 2007—2008.

[4] Kiran Kedlaya. $A < B$ (A is less than B). 1999.

[5] Evan Chen. A Brief Introduction to Olympiad Inequalities. 2014.

[6] Eeshan Banerjee. Titu's Lemma. 2015.