

Доказательство неравенств

Задачи, в которых требуется доказать неравенство, регулярно встречаются на олимпиадах высокого уровня. Цель настоящего пособия — познакомить читателя с различными приёмами доказательства неравенств.

Оглавление

1	Преобразования неравенств	3
1.1	Алгебраические преобразования	3
1.2	Умножение неравенств	5
1.3	Монотонность	5
1.4	Неравенства между средними (начало)	6
2	Классические неравенства	7
2.1	Неравенство Коши	7
2.2	Неравенство Коши — Буняковского — Шварца	12
2.3	Неравенство Гёльдера	16
2.4	Транснеравенство	17
2.5	Неравенство Чебышёва	19
2.6	Неравенство Йенсена	21
2.7	Неравенство между средними степенными	24
3	Геометрические неравенства	25
3.1	Алгебраические преобразования	25
3.2	Неравенство треугольника	25
3.3	Неравенства с медианами	26
3.4	Неравенства с биссектрисами	27

Глава 1

Преобразования неравенств

Для решения задач данной главы нет необходимости привлекать классические неравенства (Коши и пр.). Достаточно уметь выполнять алгебраические преобразования и помнить о том, что сумма квадратов неотрицательна. В некоторых случаях нужно использовать монотонность степенной функции $y = x^n$.

1.1 Алгебраические преобразования

ЗАДАЧА 1.1. (*Транснеравенство*) Пусть $x_1 < x_2$ и $y_1 < y_2$. Докажите, что

$$x_1y_1 + x_2y_2 > x_1y_2 + x_2y_1.$$

ЗАДАЧА 1.2. (*Олимпиада им. Эйлера, 2012, регион*) 1000 различных положительных чисел записаны в ряд в порядке возрастания. Вася разбил эти числа на 500 пар соседних и нашел суммы чисел во всех парах. Петя разбил эти же числа на 500 пар таким образом, что между числами в каждой паре стоит ровно три других числа, и тоже нашел суммы чисел во всех парах. Докажите, что произведение сумм, найденных Петей, больше, чем произведение сумм, найденных Васей.

ЗАДАЧА 1.3. (*Олимпиада им. Эйлера, 2013, финал*) Каждое из чисел x , y и z не меньше 0 и не больше 1. Докажите неравенство

$$\frac{x^2}{1+x+xyz} + \frac{y^2}{1+y+xyz} + \frac{z^2}{1+z+xyz} \leq 1.$$

ЗАДАЧА 1.4. (*USAMO, 1997*) Prove that, for all positive real numbers a , b , c , the inequality

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

holds.

ЗАДАЧА 1.5. (*Всеросс., 1993, округ, 9*) Докажите, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство

$$a^2 + ab + b^2 \geq 3(a + b - 1).$$

ЗАДАЧА 1.6. (*Всеросс., 2004, округ, 9*) Положительные числа x , y , z таковы, что модуль раз-

ности любых двух из них меньше 2. Докажите, что

$$\sqrt{xy+1} + \sqrt{yz+1} + \sqrt{zx+1} > x + y + z.$$

ЗАДАЧА 1.7. (Всеросс., 2012, регион, 11) Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство

$$(n-1)^{n+1}(n+1)^{n-1} < n^{2n}.$$

ЗАДАЧА 1.8. (Всеросс., 2012, регион, 9) Числа a и b таковы, что $a^3 - b^3 = 2$, $a^5 - b^5 \geq 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geq 2$.

ЗАДАЧА 1.9. (Всеросс., 2011, регион, 9) Даны положительные числа x, y, z . Докажите неравенство

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$$

ЗАДАЧА 1.10. (Всеросс., 2008, округ, 11) Числа x_1, x_2, \dots, x_n таковы, что $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ и

$$\frac{x_1}{\sqrt{1}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 1.$$

Докажите, что $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$.

ЗАДАЧА 1.11. (Всеросс., 2005, финал, 9) Сумма чисел a_1, a_2, a_3 , каждое из которых больше единицы, равна S , причём

$$\frac{a_i^2}{a_i - 1} > S$$

для любого $i = 1, 2, 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_3 + a_1} > 1.$$

ЗАДАЧА 1.12. (Всеросс., 2004, финал, 9–10) Даны натуральное число $n > 3$ и положительные числа x_1, x_2, \dots, x_n , произведение которых равно 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \dots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1.$$

ЗАДАЧА 1.13. (Всеросс., 2008, финал, 10) Найдите все такие тройки действительных чисел x, y, z , что

$$1 + x^4 \leq 2(y - z)^2, \quad 1 + y^4 \leq 2(z - x)^2, \quad 1 + z^4 \leq 2(x - y)^2.$$

Все перестановки тройки $(1, 0, 1)$

ЗАДАЧА 1.14. (IMO, 2008) Prove the inequality

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

for real numbers $x, y, z \neq 1$ satisfying the condition $xyz = 1$.

1.2 Умножение неравенств

ЗАДАЧА 1.15. (*Олимпиада им. Эйлера, 2015, финал*) По кругу написаны 2015 положительных чисел. Сумма любых двух рядом стоящих чисел больше суммы обратных к двум следующим за ними по часовой стрелке. Докажите, что произведение всех этих чисел больше 1.

ЗАДАЧА 1.16. (*Всеросс., 2011, регион, 11*) Даны положительные числа b и c . Докажите неравенство

$$(b - c)^{2011}(b + c)^{2011}(c - b)^{2011} \geq (b^{2011} - c^{2011})(b^{2011} + c^{2011})(c^{2011} - b^{2011}).$$

ЗАДАЧА 1.17. Для любых $x, y, z > 0$ докажите, что

$$(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \leq xyz.$$

Какова геометрическая интерпретация данного неравенства?

ЗАДАЧА 1.18. (*IMO, 2000*) A, B, C are positive reals with product 1. Prove that

$$\left(A - 1 + \frac{1}{B}\right) \left(B - 1 + \frac{1}{C}\right) \left(C - 1 + \frac{1}{A}\right) \leq 1.$$

ЗАДАЧА 1.19. (*Всеросс., 2014, регион, 9*) Какое из чисел больше: $(100!)!$ или $99!^{100!} \cdot 100!^{99!}$? (Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.)

□

1.3 Монотонность

При доказательстве неравенств могут оказаться полезными следующие простые факты. Если a и b — положительные числа, m и n — натуральные, то

- $a^n - b^n$ имеет тот же знак, что и $a - b$;
- $(a^m - b^m)(a^n - b^n) \geq 0$.

ЗАДАЧА 1.20. (*Всеросс., 1999, округ, 9, 11*) Произведение положительных чисел x, y и z равно 1. Докажите, что если

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x + y + z,$$

то для любого натурального k выполнено неравенство

$$\frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} \geq x^k + y^k + z^k.$$

ЗАДАЧА 1.21. (*Всеросс., 2007, округ, 10*) Для вещественных $x > y > 0$ и натуральных $n > k$ докажите неравенство

$$(x^k - y^k)^n < (x^n - y^n)^k.$$

ЗАДАЧА 1.22. (*IMO, 1996, Short List*) Consider three positive real numbers x, y, z whose product is 1. Prove that

$$\frac{xy}{x^5 + xy + y^5} + \frac{yz}{y^5 + yz + z^5} + \frac{zx}{z^5 + zx + x^5} \leq 1.$$

1.4 Неравенства между средними (начало)

ЗАДАЧА 1.23. а) Для любых $a, b > 0$ докажите, что

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

б) Средним квадратичным чисел a_1, a_2, \dots, a_n называется число

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Докажите, что среднее арифметическое положительных чисел не превосходит их среднего квадратичного:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

ЗАДАЧА 1.24. (*Tuymaada, 2013*) For every positive real numbers a and b prove the inequality

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{3} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{2}{3} \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Глава 2

Классические неравенства

2.1 Неравенство Коши

Неравенство Коши — это неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

для любых положительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n , причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Частные случаи

Сначала рассмотрим неравенство Коши для случаев $n = 2, 3, 4$.

ЗАДАЧА 2.1. Для любых $a, b > 0$ докажите, что

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

ЗАДАЧА 2.2. Для любых $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, удовлетворяющих условию $a_1 a_2 \dots a_n = 1$, докажите, что

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

ЗАДАЧА 2.3. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

ЗАДАЧА 2.4. Докажите, что если x, y по модулю меньше 1, то

$$\frac{1}{1 - x^2} + \frac{1}{1 - y^2} \geq \frac{2}{1 - xy}$$

ЗАДАЧА 2.5. Для любых $a, b > 0$, удовлетворяющих условию $ab = 1$, докажите, что

$$\frac{a}{a^2 + 3} + \frac{b}{b^2 + 3} \leq \frac{1}{2}.$$

ЗАДАЧА 2.6. (*Всеросс., 1995, округ, 9*) Докажите, что для любых положительных чисел x и y справедливо неравенство

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}.$$

ЗАДАЧА 2.7. (Олимпиада им. Эйлера, 2016, финал) Сумма неотрицательных чисел a, b, c и d равна 4. Докажите, что

$$(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc) \leq 8.$$

ЗАДАЧА 2.8. (Всеросс., 2015, регион, 9) Числа a, b, c и d таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Докажите, что $(2 + a)(2 + b) \geq cd$.

ЗАДАЧА 2.9. (Всеросс., 1993, округ, 10) Решите в положительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{x_2} = 4, \\ x_2 + \frac{1}{x_3} = 1, \\ x_3 + \frac{1}{x_4} = 4, \\ \dots \\ x_{99} + \frac{1}{x_{100}} = 4, \\ x_{100} + \frac{1}{x_1} = 1. \end{cases}$$

ЗАДАЧА 2.10. (Всеросс., 2005, округ, 10) Докажите, что для любого $x > 0$ и натурального n выполнено неравенство

$$1 + x^{n+1} \geq \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}.$$

ЗАДАЧА 2.11. (Всеросс., 2000, округ, 11) Для неотрицательных чисел x и y , не превосходящих 1, докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

ЗАДАЧА 2.12. (Всеросс., 1999, финал, 10) Для некоторых положительных чисел x и y выполняется неравенство $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$. Докажите, что $x^3 + y^3 \leq 2$.

ЗАДАЧА 2.13. Для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

ЗАДАЧА 2.14. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$a^3 + b^3 + c^3 + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a).$$

ЗАДАЧА 2.15. Для любых $a, b, c > 0$, удовлетворяющих условию $a + b + c = 3$, докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 6.$$

ЗАДАЧА 2.16. (Всеросс., 1996, округ, 10) Докажите, что если a, b, c — положительные числа и $ab + bc + ca > a + b + c$, то $a + b + c > 3$.

ЗАДАЧА 2.17. (Всеросс., 2016, регион, 11) Положительные числа x, y и z удовлетворяют условию $xyz \geq xy + yz + zx$. Докажите неравенство

$$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

ЗАДАЧА 2.18. Для любых $a, b, c > 0$, удовлетворяющих условию $a + b + c = 1$, докажите, что

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 1.$$

ЗАДАЧА 2.19. (Моск. матем. регата, 2011, 10) Докажите, что если $x > 0, y > 0, z > 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, то

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq \sqrt{3},$$

и укажите, в каком случае достигается равенство.

ЗАДАЧА 2.20. Для любых $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq a(b + c + d).$$

ЗАДАЧА 2.21. (Всеросс., 2015, регион, 10–11) Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

ЗАДАЧА 2.22. Докажите неравенство Коши для $n = 4$, используя уже доказанное неравенство Коши для $n = 2$.

ЗАДАЧА 2.23. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

ЗАДАЧА 2.24. (Всеросс., 2006, округ, 9) Известно, что $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_6^2 = 6$ и $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 0$. Докажите, что $x_1x_2 \dots x_6 \leq \frac{1}{2}$.

ЗАДАЧА 2.25. (Туумаада, 2014) Positive numbers a, b, c satisfy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Prove the inequality

$$\frac{1}{\sqrt{a^3 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{b^3 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{c^3 + 1}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

ЗАДАЧА 2.26. (Всеросс., 2013, финал, 11) Положительные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $2(a + b + c + d) \geq abcd$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq abcd$.

ЗАДАЧА 2.27. Докажите неравенство Коши для $n = 3$ двумя способами:

- 1) из неравенства задачи 2.13 получите неравенство $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$;
- 2) выведите неравенство Коши для $n = 3$ из уже доказанного неравенства Коши для $n = 4$.

ЗАДАЧА 2.28. Для любых $a, b > 0$ докажите, что

$$2a^3 + b^3 \geq 3a^2b.$$

ЗАДАЧА 2.29. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

ЗАДАЧА 2.30. Для любых $a, b, c > 0$, удовлетворяющих условию $a + b + c = 1$, докажите, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3 + \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc}.$$

ЗАДАЧА 2.31. Для любых $a, b, c > 0$, удовлетворяющих условию $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, докажите, что

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 64.$$

ЗАДАЧА 2.32. (ММО, 2008, окружной тур, 10) Произведение положительных чисел x, y и z равно 1. Докажите, что $(2 + x)(2 + y)(2 + z) \geq 27$.

ЗАДАЧА 2.33. (Неравенство Несбитта) Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

ЗАДАЧА 2.34. Для любых $a, b, c, d > 0$ докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

ЗАДАЧА 2.35. (USAMO, 2011) Let a, b, c be positive real numbers such that

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \leq 4.$$

Prove that

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3.$$

ЗАДАЧА 2.36. (Всеросс., 2016, финал, 9) Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \leq \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

ЗАДАЧА 2.37. (Всеросс., 2016, финал, 11) Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \leq \frac{1}{a^3b^3c^3d^3}.$$

ЗАДАЧА 2.38. (Всеросс., 2002, финал, 10) Сумма положительных чисел a, b, c равна 3. Докажите, что

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca.$$

ЗАДАЧА 2.39. (*Всеросс., 2015, финал, 11*) Действительные числа a, b, c, d , по модулю большие единицы, удовлетворяют соотношению

$$abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

ЗАДАЧА 2.40. (*Tuymaada, 2013*) Prove that if x, y, z are positive real numbers and $xyz = 1$ then

$$\frac{x^3}{x^2+y} + \frac{y^3}{y^2+z} + \frac{z^3}{z^2+x} \geq \frac{3}{2}.$$

ЗАДАЧА 2.41. (*IMO, 1998, Short List*) Let x, y, z be positive real numbers such that $xyz = 1$. Prove that

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

ЗАДАЧА 2.42. (*APMO, 1998*) Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right) \geq 2 + \frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

ЗАДАЧА 2.43. (*IMO, 2006*) Determine the least real number M such that the inequality

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

holds for all real numbers a, b and c .

Общий случай

Теперь докажем неравенство Коши для произвольного n . Традиционное доказательство по индукции принадлежит Коши и изложено во многих пособиях (см., например, [1]–[3]).

ЗАДАЧА 2.44. Базой индукции является уже доказанный случай $n = 2$. Далее нужно сделать две вещи.

1) Предполагая, что неравенство Коши справедливо для $n = k$, докажите, что оно справедливо для $n = 2k$ (это аналог задачи 2.22).

2) Предполагая, что неравенство Коши справедливо для $n = k$, докажите, что оно справедливо для $n = k - 1$ (это аналог пункта 2 задачи 2.27).

Объясните, почему неравенство Коши тем самым доказано для любого n .

Ещё одно доказательство неравенства Коши основано на так называемом методе сглаживания (smoothing, [4]). Суть метода заключается в том, что старые значения x_i и x_j заменяются на новые значения x'_i и x'_j с той же суммой, но расположенные ближе друг к другу, отчего произведение увеличивается. В результате, сохраняя неизменным среднее арифметическое, мы монотонно увеличиваем среднее геометрическое, и через конечное число шагов они оказываются равны друг другу. Это и означает, что среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического. Подробности — в следующей задаче.

ЗАДАЧА 2.45. 1) Пусть a — среднее арифметическое чисел x_1, x_2, \dots, x_n , причём не все эти числа равны a . Докажите, что найдутся x_i и x_j такие, что $x_i < a < x_j$.

2) Обозначим $x'_i = a$, $x'_j = x_i + x_j - a$. Покажите, что $x'_i x'_j > x_i x_j$, после чего завершите доказательство неравенства Коши.

ЗАДАЧА 2.46. Для любых $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ докажите, что

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

ЗАДАЧА 2.47. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq a^4 b + b^4 c + c^4 a.$$

ЗАДАЧА 2.48. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq abc(ab + bc + ca).$$

ЗАДАЧА 2.49. Для любых $a, b, c > 0$, удовлетворяющих условию $abc = 1$, докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c.$$

ЗАДАЧА 2.50. Для любых $a, b, c, d > 0$ докажите, что

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq a + b + c + d.$$

ЗАДАЧА 2.51. (ММО, 1997, 11) Положительные числа a, b и c таковы, что $abc = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq 1.$$

ЗАДАЧА 2.52. (Всеросс., 2007, округ, 11) Для положительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n докажите неравенство

$$(1+x_1)(1+x_1+x_2)\dots(1+x_1+x_2+\dots+x_n) \geq \sqrt{(n+1)^{n+1}} \cdot \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

2.2 Неравенство Коши — Буняковского — Шварца

Начнём с известной вам геометрической ситуации. Пусть \vec{a} и \vec{b} — два произвольных вектора на плоскости. Скалярное произведение данных векторов по абсолютной величине не превосходит произведения их длин:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|,$$

поскольку $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$, где φ — угол между векторами.

Теперь запишем это неравенство в координатах. Рассмотрим на плоскости прямоугольную декартову систему координат, и пусть \vec{i} и \vec{j} — единичные базисные векторы, направленные вдоль координатных осей. Тогда векторы \vec{a} и \vec{b} можно разложить по базисным векторам:

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}, \quad \vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j},$$

причём длины векторов и скалярное произведение выражаются через координаты векторов — числа a_1, a_2, b_1, b_2 — следующим образом:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

В результате наше неравенство примет вид

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$

или

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2.$$

Это и есть неравенство Коши — Буняковского — Шварца (КБШ) в простейшем случае $n = 2$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда координаты векторов пропорциональны: $a_1/b_1 = a_2/b_2$. Действительно, пропорциональность координат равносильна коллинеарности векторов \vec{a} и \vec{b} , то есть условию $\cos \varphi = \pm 1$ или $\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| |\vec{b}|$.

Если провести аналогичные рассуждения с векторами в трёхмерном пространстве, то получится неравенство КБШ для $n = 3$:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2.$$

Равенство достигается при $a_1/b_1 = a_2/b_2 = a_3/b_3$.

В общем случае неравенство Коши — Буняковского — Шварца¹ имеет вид

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

для любых двух наборов действительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n , причём равенство достигается тогда и только тогда, когда эти наборы пропорциональны: $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \dots = a_n/b_n$ (в записи пропорциональности мы допускаем нуль в знаменателе, когда нуль присутствует и в соответствующем числителе).

Для положительных чисел $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ неравенство КБШ можно переписать в следующем виде:

$$(x_1 + \dots + x_n)(y_1 + \dots + y_n) \geq (\sqrt{x_1 y_1} + \dots + \sqrt{x_n y_n})^2.$$

ЗАДАЧА 2.53. Неравенство

$$\sum_{i=1}^n (a_i x - b_i)^2 \geq 0$$

выполняется, очевидно, для всех x . Выведите отсюда неравенство КБШ.

ЗАДАЧА 2.54. Пусть $A^2 = \sum a_i^2$ и $B^2 = \sum b_i^2$. Запишите неравенство Коши для двух чисел a_i^2/A^2 и b_i^2/B^2 . Выведите отсюда неравенство КБШ.

ЗАДАЧА 2.55. (*Titu's Lemma*²) Непосредственным вычислением убедитесь, что для любых действительных чисел x_i, y_i ($y_i > 0$) выполнено

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} \geq \frac{(x_1 + x_2)^2}{y_1 + y_2},$$

¹В англоязычной литературе оно называется *Cauchy-Schwarz inequality* или просто CS.

²Титу Андрееску — румынский и американский математик, тренер сборной США и автор многих задач на Международной математической олимпиаде. Говорят [6], что он обнаружил это неравенство в 2001 году. В современной англоязычной литературе для данного неравенства общеприняты названия *Titu's Lemma* или *Engel Form of the CS*, хотя в руководстве [3] оно названо *неравенством Шварца*.

после чего докажете по индукции, что

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}.$$

Когда достигается равенство?

ЗАДАЧА 2.56. Выведите лемму Титу из неравенства КБШ.

Неравенство Коши — Буняковского — Шварца и лемма Титу являются очень мощным оружием, и надо непременно научиться ими пользоваться. Оставшиеся задачи данного раздела (в том числе и те, которые встречались раньше) нужно решить с помощью неравенства КБШ или леммы Титу.

ЗАДАЧА 2.57. Для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ докажите, что

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2.$$

ЗАДАЧА 2.58. Для любых $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ докажите, что

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \dots + \frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

ЗАДАЧА 2.59. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca}.$$

ЗАДАЧА 2.60. Докажите неравенства задач 2.13, 2.46, 2.50.

ЗАДАЧА 2.61. Выведите неравенство Несбитта (задача 2.33): а) из неравенства КБШ, предъявив соответствующие векторы; б) из леммы Титу.

ЗАДАЧА 2.62. ([2]) For nonnegative real numbers x, y, z prove that

$$\sqrt{3x^2 + xy} + \sqrt{3y^2 + yz} + \sqrt{3z^2 + zx} \leq 2(x + y + z).$$

ЗАДАЧА 2.63. ([2]) For positive real numbers a, b, c prove that

$$\frac{a}{a + 2b} + \frac{b}{b + 2c} + \frac{c}{c + 2a} \geq 1.$$

ЗАДАЧА 2.64. ([2]) For positive real numbers a, b, c prove that

$$\left(\frac{a}{a + 2b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b + 2c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c + 2a}\right)^2 \geq \frac{1}{3}.$$

ЗАДАЧА 2.65. (RMO, 2013; [6]) Let a, b, c, d, e be positive real numbers, each > 1 . Prove that the following inequality holds:

$$\frac{a^2}{c-1} + \frac{b^2}{d-1} + \frac{c^2}{e-1} + \frac{d^2}{a-1} + \frac{e^2}{b-1} \geq 20.$$

ЗАДАЧА 2.66. (*Croatia, 2004*; [6]) Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+a)(b+c)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

ЗАДАЧА 2.67. (*Japan TST, 2004*) Let a, b, c be positive real numbers with sum 1. Prove that

$$\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} \leq \frac{2a}{b} + \frac{2b}{c} + \frac{2c}{a}.$$

ЗАДАЧА 2.68. В некоторых ситуациях, к которым приводит лемма Титу, может оказаться полезным следующее элементарное наблюдение. Пусть A, B, λ, μ — положительные числа (часто оказывается, например, что $A = a^2 + b^2 + c^2$ и $B = ab + bc + ca$). Покажите, что знак выражения

$$\frac{A + \lambda B}{A + \mu B} - \frac{1 + \lambda}{1 + \mu}$$

совпадает со знаком выражения $(\mu - \lambda)(A - B)$.

ЗАДАЧА 2.69. (*USAJMO, 2012*) Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\frac{a^3 + 3b^3}{5a + b} + \frac{b^3 + 3c^3}{5b + c} + \frac{c^3 + 3a^3}{5c + a} \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

ЗАДАЧА 2.70. (*IMO, 1995*) Let a, b, c be positive real numbers such that $abc = 1$. Prove that

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

ЗАДАЧА 2.71. ([6]) Let a, b, c be positive real numbers such that $abc = 1$. Prove that

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

ЗАДАЧА 2.72. (*IZhO, 2008*) Докажите, что для любых положительных действительных чисел a, b, c таких, что $abc = 1$, выполнено неравенство

$$\frac{1}{(a+b)b} + \frac{1}{(b+c)c} + \frac{1}{(c+a)a} \geq \frac{3}{2}.$$

ЗАДАЧА 2.73. ([3]) Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a^2 - bc}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2 - ca}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{c^2 - ab}{2c^2 + a^2 + b^2} \geq 0.$$

ЗАДАЧА 2.74. (*Tuymaada, 2012*) Prove that for any real numbers a, b, c satisfying $abc = 1$ the following inequality holds

$$\frac{1}{2a^2 + b^2 + 3} + \frac{1}{2b^2 + c^2 + 3} + \frac{1}{2c^2 + a^2 + 3} \leq \frac{1}{2}.$$

ЗАДАЧА 2.75. (*IMO, 2005*) Let x, y, z be three positive reals such that $xyz \geq 1$. Prove that

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0.$$

2.3 Неравенство Гёльдера

Неравенство Гёльдера служит обобщением неравенства Коши — Буняковского — Шварца. Мы ограничимся здесь частным случаем неравенства Гёльдера, достаточным для доказательства многих олимпиадных неравенств (включая IMO).

ЗАДАЧА 2.76. Действуя аналогично выводу неравенства КБШ в задаче 2.54, докажите, что для трёх наборов положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n , b_1, b_2, \dots, b_n и c_1, c_2, \dots, c_n справедливо неравенство

$$(a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)(b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_n^3)(c_1^3 + c_2^3 + \dots + c_n^3) \geq (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \dots + a_nb_nc_n)^3.$$

Это и есть *неравенство Гёльдера* (точнее, его вышеупомянутый частный случай). Его можно переписать в следующем виде:

$$(x_1 + \dots + x_n)(y_1 + \dots + y_n)(z_1 + \dots + z_n) \geq (\sqrt[3]{x_1y_1z_1} + \dots + \sqrt[3]{x_ny_nz_n})^3.$$

ЗАДАЧА 2.77. Выведите неравенство задачи 2.58 из неравенства Гёльдера.

ЗАДАЧА 2.78. Продолжая указанную аналогию, запишите и докажите неравенство Гёльдера для четырёх наборов переменных.

ЗАДАЧА 2.79. Для любых положительных чисел a, b, c, x, y, z докажите, что

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}.$$

ЗАДАЧА 2.80. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a^6}{b^2+c^2} + \frac{b^6}{c^2+a^2} + \frac{c^6}{a^2+b^2} \geq \frac{1}{2}abc(a+b+c).$$

ЗАДАЧА 2.81. (*Всеукр., 2006*) Пусть x, y и z — положительные числа, такие, что $xy+yz+zx = 1$. Докажите, что

$$\frac{x^3}{1+9y^2xz} + \frac{y^3}{1+9z^2xy} + \frac{z^3}{1+9x^2yz} \geq \frac{(x+y+z)^3}{18}.$$

ЗАДАЧА 2.82. (*Balkan MO*) Prove that for all positive real numbers a, b, c

$$\frac{1}{a(b+c)} + \frac{1}{b(c+a)} + \frac{1}{c(a+b)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

ЗАДАЧА 2.83. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \geq \sqrt{a+b+c}.$$

ЗАДАЧА 2.84. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+2c^2}} + \frac{bc}{\sqrt{bc+2a^2}} + \frac{ca}{\sqrt{ca+2b^2}} \geq \sqrt{ab+bc+ca}.$$

ЗАДАЧА 2.85. (*IMO, 2001*) Prove that

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

for all positive real numbers a , b and c .

ЗАДАЧА 2.86. (*USA TST, 2010*) Let a, b, c be positive reals such that $abc = 1$. Show that

$$\frac{1}{a^5(b+2c)^2} + \frac{1}{b^5(c+2a)^2} + \frac{1}{c^5(a+2b)^2} \geq \frac{1}{3}.$$

ЗАДАЧА 2.87. (*IMO, 2004, Short List*) If a, b, c are three positive real numbers such that $ab + bc + ca = 1$, prove that

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}.$$

2.4 Транснеравенство

Напомним понятие центра масс. Расположим массы m_1, m_2, \dots, m_n в точках координатной прямой с координатами x_1, x_2, \dots, x_n . *Центром масс* полученной системы называется точка с координатой

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Теперь рассмотрим возрастающую последовательность координат

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$$

и возрастающую последовательность масс

$$m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n.$$

Пусть $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ — некоторая перестановка масс m_1, m_2, \dots, m_n :

$$\mu_1 = m_{i_1}, \mu_2 = m_{i_2}, \dots, \mu_n = m_{i_n}.$$

Поместим массы $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ в точки с координатами x_1, x_2, \dots, x_n соответственно. Центр масс окажется в точке

$$x_c(\mu) = \frac{x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2 + \dots + x_n \mu_n}{M},$$

где $M = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = m_1 + m_2 + \dots + m_n$. Нас интересует вопрос: для какой перестановки масс центр масс $x_c(\mu)$ расположен правее всего, а для какой — левее всего?

Интуитивно понятно, что центр масс займёт самое правое положение, если массы расположены по возрастанию, и самое левое положение — если массы расположены по убыванию:

$$\frac{x_1 m_n + x_2 m_{n-1} + \dots + x_n m_1}{M} \leq x_c(\mu) \leq \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{M},$$

или

$$x_1 m_n + x_2 m_{n-1} + \dots + x_n m_1 \leq x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2 + \dots + x_n \mu_n \leq x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n.$$

Это и есть *транснеравенство*.

ЗАДАЧА 2.88. Пусть $x_1 \leq x_2$ и $y_1 \leq y_2$. Докажите, что $x_1y_2 + x_2y_1 \leq x_1y_1 + x_2y_2$.

ЗАДАЧА 2.89. (*Транснеравенство*) Пусть x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_n — возрастающие последовательности:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n, \quad y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n.$$

Докажите, что для любой перестановки u_1, u_2, \dots, u_n членов последовательности y_1, y_2, \dots, y_n справедливо неравенство

$$x_1y_n + x_2y_{n-1} + \dots + x_1y_1 \leq x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n \leq x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Иными словами, «скалярное произведение» последовательностей максимально (по всем перестановкам их членов), когда эти последовательности упорядочены одинаково, и минимально, когда они упорядочены противоположно.

ЗАДАЧА 2.90. (*Высшая проба, 2013, 11*) Вместо крестиков в выражении

$$\times \cdot \times + \times \cdot \times + \dots + \times \cdot \times$$

(50 слагаемых) расставили числа $1, \dots, 100$, каждое по одному разу. Какое максимальное и минимальное значение может иметь полученное выражение?

09888 и 091691

Транснеравенство можно использовать при доказательстве *симметричных* неравенств (не меняющихся при любой перестановке переменных), хотя, казалось бы, об упорядоченности значений переменных в условии ничего не сказано. Приём состоит в следующем. Пусть, например, нужно доказать симметричное неравенство вида $f(a, b, c) \geq 0$. Так как перестановки переменных ничего не меняют, можно *без ограничения общности* предположить, что $a \leq b \leq c$.

ЗАДАЧА 2.91. Пользуясь описанным приёмом, докажите неравенства задач [2.13](#), [2.29](#) (и затем неравенство Коши для $n = 3$), [2.23](#), [2.18](#), [2.58](#), [2.33](#).

ЗАДАЧА 2.92. Выведите из транснеравенства неравенство Коши для $n = 4$.

ЗАДАЧА 2.93. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

ЗАДАЧА 2.94. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a}{b(b+c)} + \frac{b}{c(c+a)} + \frac{c}{a(a+b)} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

ЗАДАЧА 2.95. Для любых $a, b, c > 0$, удовлетворяющих условию $abc = 1$, докажите, что

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq a + b + c.$$

ЗАДАЧА 2.96. Решите задачу [2.70](#) с помощью транснеравенства.

ЗАДАЧА 2.97. Для любых $a, b, c > 1$ докажите, что $a^ab^bc^c \geq a^bb^cc^a$.

ЗАДАЧА 2.98. (IMO, 1975) Let x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) be real numbers such that

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \quad \text{and} \quad y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n.$$

Prove that, if z_1, z_2, \dots, z_n is any permutation of y_1, y_2, \dots, y_n , then

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2.$$

2.5 Неравенство Чебышёва

Снова рассмотрим возрастающую последовательность координат

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n.$$

Если в точках с этими координатами поместить равные массы m , то центр масс совпадёт со средним арифметическим:

$$x_c = \frac{x_1 m + x_2 m + \dots + x_n m}{nm} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Если же в этих точках расположить массы, взятые в порядке возрастания:

$$m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n,$$

то интуитивно понятно, что центр масс сместится вправо от среднего арифметического:

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Последнее неравенство перепишем в виде

$$n(x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(m_1 + m_2 + \dots + m_n).$$

Это и есть *неравенство Чебышёва*.

ЗАДАЧА 2.99. Пусть $x_1 \leq x_2$ и $y_1 \leq y_2$. Докажите, что

$$2(x_1 y_1 + x_2 y_2) \geq (x_1 + x_2)(y_1 + y_2).$$

ЗАДАЧА 2.100. Пусть $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ и $y_1 \leq y_2 \leq y_3$. Докажите, что

$$3(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) \geq (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3).$$

ЗАДАЧА 2.101. (*Неравенство Чебышёва*) Пусть x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_n — возрастающие последовательности:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n, \quad y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n.$$

Докажите, что

$$n(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

ЗАДАЧА 2.102. Выведите неравенство Чебышёва из транснеравенства. *Указание.* В силу транснеравенства имеем $x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \leq x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_ny_1$. Запишите ещё $n - 1$ таких неравенств, полученных циклическими перестановками игреков, и все эти неравенства сложите.

Неравенство Чебышёва используется при доказательстве симметричных неравенств таким же образом, как и транснеравенство: коль скоро симметричное неравенство не меняется при перестановках переменных, мы можем без ограничения общности считать, что значения переменных упорядочены.

ЗАДАЧА 2.103. Докажите неравенства задач 2.57 и 2.93 с помощью неравенства Чебышёва.

ЗАДАЧА 2.104. Пусть $a \geq b \geq c \geq 0$ и $0 < x \leq y \leq z$. Докажите, что

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \frac{3(a+b+c)}{x+y+z}.$$

Выведите отсюда неравенство Несбитта 2.33.

ЗАДАЧА 2.105. Обобщите неравенство предыдущей задачи на случай n переменных.

ЗАДАЧА 2.106. Пусть $\alpha \geq 2$. Для любых $x, y, z > 0$, таких, что $xyz \geq 1$, докажите, что

$$\frac{x^\alpha}{y+z} + \frac{y^\alpha}{z+x} + \frac{z^\alpha}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

ЗАДАЧА 2.107. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

ЗАДАЧА 2.108. Пусть последовательности x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_n противоположно упорядочены:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n, \quad y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n.$$

Докажите, что

$$n(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) \leq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

ЗАДАЧА 2.109. Средним степенным степени $k \in \mathbb{N}$ чисел a_1, a_2, \dots, a_n называется число

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k}{n}}.$$

Докажите, что среднее арифметическое положительных чисел не превосходит их среднего степенного любой степени $k \geq 2$:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k}{n}}.$$

ЗАДАЧА 2.110. Для любых $a, b, c > 1$ докажите, что

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

2.6 Неравенство Йенсена

Неравенство Йенсена — простое и очень мощное неравенство. Из него можно получить, в частности, неравенства Коши, Коши — Буняковского — Шварца, Гёльдера и ряд других полезных неравенств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество на плоскости называется выпуклым, если вместе с любой парой своих точек оно целиком содержит отрезок, их соединяющий.

С каждой функцией $y = f(x)$, определённой на промежутке I , связаны некоторые множества точек координатной плоскости. Именно, наряду с графиком данной функции — множеством

$$\Gamma = \{(x, y) \mid x \in I, y = f(x)\}$$

рассмотрим *суперграфик*

$$\Gamma_+ = \{(x, y) \mid x \in I, y \geq f(x)\}$$

(множество точек, расположенных над графиком, включая сам график). Аналогично определим *субграфик*

$$\Gamma_- = \{(x, y) \mid x \in I, y \leq f(x)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция называется выпуклой, если её суперграфик — выпуклое множество. Функция называется вогнутой, если её субграфик — выпуклое множество.

ЗАДАЧА 2.111. Пусть $a < b$ и $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$. Покажите, что если λ пробегает отрезок $[0; 1]$, то x пробегает отрезок $[a; b]$.

ЗАДАЧА 2.112. Докажите, что функция $y = f(x)$, определённая на промежутке I , является выпуклой тогда и только тогда, когда

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) \leq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in I$ и любых неотрицательных λ, μ таких, что $\lambda + \mu = 1$. Сформулируйте аналогичный критерий вогнутости функции.

ЗАДАЧА 2.113. Докажите, что $y = x^2$ — выпуклая функция, а $y = \sqrt{x}$ — вогнутая.

ЗАДАЧА 2.114. (*Неравенство Юнга*) Пусть $a, b, p, q > 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

Выше было дано определение понятия центра масс для системы точек на прямой. Обобщим его на случай системы точек на плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть в точках с координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ расположены массы m_1, m_2, \dots, m_n . Центром масс данной системы называется точка с координатами

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

ЗАДАЧА 2.115. Одну из точек системы назовём красной, а остальные — синими. Покажите, что центр масс данной системы совпадает с центром масс двух точек: красной и центра масс всех синих (в котором помещена масса всех синих точек).

ЗАДАЧА 2.116. Докажите, что центр масс нескольких точек выпуклого множества также принадлежит этому множеству.

ЗАДАЧА 2.117. (*Неравенство Йенсена*) Рассмотрим выпуклую функцию $y = f(x)$, определённую на промежутке I , и числа $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите неравенство Йенсена (обобщение задачи 2.112):

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

В частности,

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Указание. Поместите массы $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ в точки графика с абсциссами x_1, x_2, \dots, x_n соответственно; воспользуйтесь выпуклостью суперграфика и результатом предыдущей задачи.

ЗАДАЧА 2.118. Что изменится в неравенстве Йенсена, если выпуклую функцию заменить на вогнутую?

Итак, любая выпуклая или вогнутая функция порождает некоторое неравенство (в большей или меньшей степени содержательное). Давайте смотреть, к каким неравенствам приводят известные вам элементарные функции.

ЗАДАЧА 2.119. Пусть $f(x) = x^2$. Какое неравенство получается из неравенства Йенсена?

ЗАДАЧА 2.120. *Средним гармоническим* чисел x_1, x_2, \dots, x_n называется число, обратное среднему арифметическому обратных чисел $1/x_1, 1/x_2, \dots, 1/x_n$. Докажите, что среднее гармоническое положительных чисел не превосходит их среднего арифметического:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Замечание. Используются аббревиатуры: АМ — среднее арифметическое (arithmetic mean), ГМ — среднее геометрическое (geometric mean), ҚМ — среднее квадратичное (quadratic mean), НМ — среднее гармоническое (harmonic mean). Имеем неравенство между этими четырьмя средними:

$$\text{НМ} \leq \text{ГМ} \leq \text{АМ} \leq \text{ҚМ}.$$

ЗАДАЧА 2.121. Пусть $f(x) = e^x$. Выведите из неравенства Йенсена неравенство Коши.

ЗАДАЧА 2.122. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — положительные числа, причём

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1.$$

Докажите, что

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$$

(это обобщение неравенства Юнга из задачи 2.114).

Выше был рассмотрен частный случай неравенства Гёльдера. Теперь мы можем доказать это неравенство в общем виде.

ЗАДАЧА 2.123. (*Неравенство Гёльдера*) Рассмотрим несколько наборов из n положительных чисел:

$$a_1, a_2, \dots, a_n; \quad b_1, b_2, \dots, b_n; \quad \dots; \quad z_1, z_2, \dots, z_n.$$

Пусть $\lambda_a, \lambda_b, \dots, \lambda_z$ — соответствующие данным наборам положительные числа, причём

$$\lambda_a + \lambda_b + \dots + \lambda_z = 1.$$

Докажите, что

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{\lambda_a} (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^{\lambda_b} \dots (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^{\lambda_z} &\geq \\ &\geq a_1^{\lambda_a} b_1^{\lambda_b} \dots z_1^{\lambda_z} + a_2^{\lambda_a} b_2^{\lambda_b} \dots z_2^{\lambda_z} \dots a_n^{\lambda_a} b_n^{\lambda_b} \dots z_n^{\lambda_z}. \end{aligned}$$

Указание. Без ограничения общности полагаем

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \dots = z_1 + z_2 + \dots + z_n = 1$$

(почему?) и используем результат предыдущей задачи.

ЗАДАЧА 2.124. Объясните, как из общего неравенства Гёльдера получается частный случай, доказанный в задаче 2.76.

ЗАДАЧА 2.125. Какое неравенство получится, если записать неравенство Гёльдера для двух наборов a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n , положив при этом $\lambda_a = \lambda_b = 1/2$?

ЗАДАЧА 2.126. Для любых положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n докажите, что

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_n^{a_n}.$$

ЗАДАЧА 2.127. Пусть $x, y, z > 0$ и $x + y + z = xyz$. Докажите, что

$$\frac{1}{1 + xy} + \frac{1}{1 + yz} + \frac{1}{1 + zx} \leq \frac{3}{4}.$$

ЗАДАЧА 2.128. Пусть $x, y, z > 0$ и $x + y + z \geq 1$. Докажите, что

$$\frac{x\sqrt{x}}{y+z} + \frac{y\sqrt{y}}{z+x} + \frac{z\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ЗАДАЧА 2.129. (*IMO, Short List*) Let x_1, x_2, \dots, x_n be positive reals. Prove that

$$\frac{1}{1 + x_1} + \frac{1}{1 + x_2} + \dots + \frac{1}{1 + x_n} \leq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}.$$

ЗАДАЧА 2.130. Решите задачу 2.85 с помощью неравенства Йенсена.

ЗАДАЧА 2.131. Пусть $a, b, c, d > 0$ и $a + b + c + d = 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{b^2 + b} + \frac{b}{c^2 + c} + \frac{c}{d^2 + d} + \frac{d}{a^2 + a} \geq \frac{8}{(a + c)(b + d)}.$$

ЗАДАЧА 2.132. (*IMO, 2009, Short List*) Let a, b, c be positive real numbers such that

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c.$$

Prove that

$$\frac{1}{(2a + b + c)^2} + \frac{1}{(2b + c + a)^2} + \frac{1}{(2c + a + b)^2} \leq \frac{3}{16}.$$

2.7 Неравенство между средними степенными

Среднее степенное натуральной степени нам уже встретилось в задаче 2.109. Здесь мы обобщим это понятие на случай произвольной действительной степени.

Пусть r — ненулевое действительное число. *Степенным средним* степени r положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n называется число

$$M_r = \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Заметьте, что $M_1 = \text{AM}$, $M_2 = \text{QM}$, $M_{-1} = \text{HM}$ (см. аббревиатуры в задаче 2.120). Определим также

$$M_0 = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Ниже мы покажем, что это определение — по непрерывности, то есть $M_r \rightarrow M_0$ при $r \rightarrow 0$.

Как мы уже знаем, $M_{-1} \leq M_0 \leq M_1 \leq M_2$. Более того, оказывается, что *среднее степенное M_r является возрастающей функцией величины r* .

ЗАДАЧА 2.133. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ и $\alpha > 1$. Докажите, что

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^\alpha \leq \frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n}.$$

ЗАДАЧА 2.134. Докажите, что $M_r \leq M_s$ в случаях $0 < r < s$ и $r < s < 0$.

ЗАДАЧА 2.135. Докажите, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} M_r = M_0.$$

ЗАДАЧА 2.136. (*Всеросс., 2003, финал, 9*) Пусть a, b, c — положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

ЗАДАЧА 2.137. Задача 2.25 имеет короткое решение через средние степенные. Найдите его.

Полученные результаты обобщаются на случай взвешенных средних степенных. Именно, наряду с введёнными обозначениями рассмотрим положительные числа (веса) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, для которых $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. Определим *взвешенное среднее степенное* степени r :

$$M_r^\lambda = \begin{cases} (\lambda_1 a_1^r + \lambda_2 a_2^r + \dots + \lambda_n a_n^r)^{\frac{1}{r}}, & \text{если } r \neq 0; \\ a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n}, & \text{если } r = 0. \end{cases}$$

ЗАДАЧА 2.138. Для величины M_r^λ докажите утверждения, аналогичные задачам 2.134 и 2.135.

ЗАДАЧА 2.139. (*Taiwan TST*) Let a, b, c be positive reals. Prove that

$$3(a + b + c) \geq 8\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}}.$$

Глава 3

Геометрические неравенства

3.1 Алгебраические преобразования

ЗАДАЧА 3.1. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, p — его полупериметр, S — его площадь. Докажите неравенства:

а) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4p^2$;

б) $p^2 \geq 3\sqrt{3}S$.

ЗАДАЧА 3.2. (*ИМО, 1961*) Let a, b, c be the sides of a triangle, and T its area. Prove:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}T.$$

In what case does equality hold?

3.2 Неравенство треугольника

ЗАДАЧА 3.3. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

ЗАДАЧА 3.4. (*ММО, 2002, 9*) Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство

$$a^3 + b^3 + 3abc > c^3.$$

ЗАДАЧА 3.5. (*ММО, 1999, 11*) a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + 2ca}{c^2 + a^2} + \frac{c^2 + 2ab}{a^2 + b^2} > 3.$$

ЗАДАЧА 3.6. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

ЗАДАЧА 3.7. (IMO, 1964) Suppose a, b, c are the sides of a triangle. Prove that

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

ЗАДАЧА 3.8. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника с периметром 3. Докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{a+b-c}} + \frac{1}{\sqrt{b+c-a}} + \frac{1}{\sqrt{c+a-b}} \geq \frac{9}{ab+bc+ca}.$$

ЗАДАЧА 3.9. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$(a+b-c)^a(b+c-a)^b(c+a-b)^c \leq a^a b^b c^c.$$

3.3 Неравенства с медианами

ЗАДАЧА 3.10. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, m_c — медиана к стороне c . Докажите неравенство

$$\frac{a+b-c}{2} < m_c < \frac{a+b}{2}.$$

ЗАДАЧА 3.11. Докажите, что сумма медиан треугольника больше $3/4$ периметра и меньше периметра.

ЗАДАЧА 3.12. Докажите, что большей стороне треугольника соответствует меньшая медиана.

ЗАДАЧА 3.13. Докажите неравенства:

$$\text{а) } a^2 + b^2 \geq \frac{c^2}{2}; \quad \text{б) } m_a^2 + m_b^2 \geq \frac{9c^2}{8}.$$

ЗАДАЧА 3.14. (Всеросс., 1994, финал, 10) Пусть a, b и c — стороны треугольника, m_a, m_b и m_c — медианы, проведённые к этим сторонам, D — диаметр окружности, описанной около треугольника. Докажите, что

$$\frac{a^2 + b^2}{m_c} + \frac{b^2 + c^2}{m_a} + \frac{c^2 + a^2}{m_b} \leq 6D.$$

ЗАДАЧА 3.15. (Теорема Лейбница о медианах) Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Докажите, что для любой точки X выполнено равенство

$$AX^2 + BX^2 + CX^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 + 3MX^2.$$

ЗАДАЧА 3.16. Докажите, что для любой точки X справедливо неравенство

$$AX^2 + BX^2 + CX^2 \geq \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

В каком случае достигается равенство?

ЗАДАЧА 3.17. Докажите неравенства:

$$\text{а) } m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq \frac{27R^2}{4}; \quad \text{б) } m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}.$$

3.4 Неравенства с биссектрисами

ЗАДАЧА 3.18. Докажите, что

$$\text{а) } l_a = \frac{2bc \cos \frac{\alpha}{2}}{b+c}; \quad \text{б) } l_a = \frac{2\sqrt{bc p(p-a)}}{b+c}.$$

ЗАДАЧА 3.19. Докажите, что большему углу треугольника отвечает меньшая биссектриса.

ЗАДАЧА 3.20. Докажите неравенство

$$l_a \leq \sqrt{p(p-a)}.$$

ЗАДАЧА 3.21. Докажите неравенства:

$$\text{а) } l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq p^2; \quad \text{б) } l_a + l_b + l_c \leq p\sqrt{3}.$$

ЗАДАЧА 3.22. (*Всеросс. по геометрии, 2011, 10*) Докажите, что для любого неравнобедренного треугольника

$$l_1^2 > S\sqrt{3} > l_2^2$$

где l_1 и l_2 — наибольшая и наименьшая биссектрисы треугольника, S — его площадь.

Литература

- [1] Ю. П. Соловьёв. Неравенства. МЦНМО, 2005.
- [2] Samin Riasat. Basics of Olympiad Inequalities. 2008.
- [3] Pham Kim Hung. Secrets in Inequalities. V. 1–2. 2007—2008.
- [4] Kiran Kedlaya. $A < B$ (A is less than B). 1999.
- [5] Evan Chen. A Brief Introduction to Olympiad Inequalities. 2014.
- [6] Eeshan Banerjee. Titu's Lemma. 2015.