

Доказательство от противного

1. («Курчатов», 2018, 7.4) Все натуральные числа раскрашены в три цвета. Докажите, что найдутся два числа одного цвета, разность между которыми является квадратом натурального числа.
2. (Московская устная олимпиада, 2012, 6.8) Можно ли 100 гирь массами $1, 2, 3, \dots, 99, 100$ разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?
3. (Московская устная олимпиада, 2005, 6.8) На Всемирном конгрессе мудрецов звездочёты сидят в ряд напротив алхимиков за большим длинным столом, а во главе стола сидит Самый Почтенный Мудрец. В первый день конгресса оказалось, что напротив каждого алхимика сидит звездочёт с более длинной бородой, чем у него. На второй день алхимики договорились сесть за столом в порядке возрастания длины бороды от конца стола до Самого Почтенного Мудреца. Но и звездочёты договорились между собой сесть в порядке возрастания длиннородости от конца стола до Самого Почтенного Мудреца. Докажите, что и во второй день напротив каждого алхимика будет сидеть звездочёт с более длинной бородой, чем у него.