

## Формула расстояния между точками

Пусть на координатной плоскости  $Oxy$  даны две точки  $A_1(x_1, y_1)$  и  $A_2(x_2, y_2)$ . Расстояние между этими точками вычисляется по формуле

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Если в алгебраической (по формулировке) задаче фигурирует корень из суммы квадратов, то, возможно, имеется геометрическое решение: интерпретируем этот корень как расстояние между некоторыми точками и используем неравенство треугольника.

1. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8) Найдите наименьшее значение выражения

$$2\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(x - 2)^2 + 4} + \sqrt{(x - 3)^2 + 16}.$$

9

2. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 9) Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a - 3)^2 + (b - 3)^2} + 2\sqrt{(a - 3)^2 + (b + 1)^2} + 2\sqrt{((a + 1)^2 + (b - 3)^2)}.$$

7

3. («Высшая проба», 2013, 10) Пусть  $x$ ,  $y$  и  $z$  — произвольные вещественные числа. Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$\sqrt{2 + x^2} + \sqrt{2 + (x - y)^2} + \sqrt{2 + (y - z)^2} + \sqrt{2 + (2 - z)^2}?$$

Обоснуйте свой ответ.

9

4. («Высшая проба», 2013, 11) Пусть  $x$ ,  $y$  и  $z$  — произвольные вещественные числа. Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + (x - y)^2} + \sqrt{1 + (y - z)^2} + \sqrt{1 + (3 - z)^2}?$$

Обоснуйте свой ответ.

9

5. (МФТИ, 2008) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 16x + 64} + \sqrt{x^2 + y^2 + 12y + 36} = 10, \\ 5x^2 - 8y^2 = 8. \end{cases}$$

(8-7)

6. (МГУ, ВМК, 1996) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 14x - 10y + 58 = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 16x - 12y + 100} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 20y + 104} = 2\sqrt{29}. \end{cases}$$

$$\left( \frac{217 - 5\sqrt{415}}{29}, \frac{29}{2\sqrt{415}} \right)$$

7. («Физтех», 2012) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - (4a + 2)x + 4a^2 + 4a - 3 = 0, \\ \sqrt{x^2 + (y + 2a)^2} + \sqrt{(x + 4)^2 + (y + 2a)^2} = 4 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

$$\left[ \frac{2}{1}; \frac{2}{3} - \right) \cap \left( \frac{2}{3} -; \frac{2}{2} - \right]$$

8. (МГУ, географич. ф-т, 1999) При каких значениях параметра  $a$  система

$$\begin{cases} y^2 - (2a + 1)y + a^2 + a - 2 = 0, \\ \sqrt{(x - a)^2 + y^2} + \sqrt{(x - a)^2 + (y - 3)^2} = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

$$[-2; 2) \cup (1; 4]$$

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) Найдите минимальное значение выражения

$$\sqrt{(x + 6)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y - 4)^2}$$

при условии  $2|x| + 3|y| = 6$ .

$$2\sqrt{\frac{13}{205}}$$