

Делимость. Разное

1. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 7–8) Найдите наибольшее трёхзначное число, которое кратно сумме своих цифр и в котором первая цифра совпадает с третьей, но не совпадает со второй.

828

2. (Всеросс., 2015, I этап, 9) Сколько существует трёхзначных чисел, которые в 5 раз больше произведения своих цифр?

0шт0

3. («Ломоносов», 2012, 9) Найдите все такие значения n , что среди любого набора из n натуральных чисел, являющихся точными квадратами, всегда найдутся два числа, разность которых делится на 2011.

 $n \geq 1007$

4. («Высшая проба», 2015, 9) Найти все натуральные числа n , такие, что число $n^2 + 77n$ является точным квадратом натурального числа.

4, 99, 175, 1444

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 9) Найдите площадь треугольника, если известно, что радиус вписанной окружности равен 1, а длины всех трёх высот выражаются целыми числами.

 $3\sqrt{3}$

6. («Физтех», 2015, 10–11) Найдите количество натуральных чисел k , не превосходящих 353500 и таких, что $k^2 + k$ делится нацело на 505.

2800

7. («Физтех», 2015, 10–11) Найдите количество натуральных чисел k , не превосходящих 445000 и таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 445.

4000

8. («Высшая проба», 2015, 10) а) Найти хотя бы два различных натуральных числа n , для каждого из которых число $n^2 + 2015n$ является точным квадратом натурального числа.

б) Найти количество всех натуральных чисел n , для каждого из которых число $n^2 + 2015n$ является точным квадратом натурального числа.

а) 496 и 1007²; б) 13

9. («Физтех», 2013, 10) При каком наибольшем натуральном значении n число $n! + 5n + 52$ является точным квадратом?

2

10. («Физтех», 2011, 10) Найдите натуральное число, которое ровно в 25 раз меньше, чем сумма всех натуральных чисел, меньших его и делящихся на 31.

1891

11. (Всеросс., 2015, I этап, 11) Сколько существует натуральных чисел n , для которых $4^n - 15$ является квадратом целого числа?

177

12. («Физтех», 2011, 11) Два трёхзначных числа таковы, что сумма остальных трёхзначных чисел ровно в 770 раз больше одного из них. Найдите наибольшее из этих чисел.

179

13. («Ломоносов», 2006) На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник размером $m \times n$ клеток, причём числа m и n взаимно просты и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найдите все возможные значения m и n при данных условиях.

(69'8) или (111'1)

14. («Высшая проба», 2015, 11) Обозначим через T_k произведение первых k нечётных простых чисел: $T_1 = 3$, $T_2 = 3 \cdot 5$, $T_6 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$ и т. д. Для каждого натурального k найти количество натуральных чисел n таких, что число $n^2 + T_k n$ является точным квадратом натурального числа. Решить задачу: а) для $k = 1$; б) для $k = 2$; в) для произвольного заданного натурального k .

$\frac{2}{1-3^k}$ (в)

15. («Ломоносов», 2015, 10–11) Маша, скучая на уроке математики, проделала с некоторым 2015-значным натуральным числом следующую операцию: от десятичной записи этого числа она отбросила последнюю цифру и к умноженному на 3 получившемуся числу прибавила удвоенную отброшенную цифру. С полученным числом она опять проделала ту же операцию и так далее. После многократного применения этой операции получающиеся у Маши числа перестали меняться, и тогда она остановилась.

а) Какое число оказалось у Маши в конце?

б) Какое наименьшее число могло быть у Маши в самом начале (укажите две его последние цифры)?

(600...001 отсюда) 60 (9 ; 1 (в)