Десятичная система счисления

1. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 5.1*) К числу прибавили сумму его цифр и получили 2017. Приведите пример такого числа.

2. (*Всеросс., 2015, МЭ, 5.1*) К некоторому числу прибавили сумму его цифр и получили 2014. Приведите пример такого числа.

3. (*«Курчатов», 2015, 6.1*) Натуральное число называется *палиндромом*, если оно не изменяется при выписывании его цифр в обратном порядке (например, числа 4, 55, 626 — палиндромы, а 20, 201, 2015 — нет). Представьте число 2000 двумя способами в виде суммы двух палиндромов.

4. (*Математический праздник, 2008, 6.1*) Сегодня 17.02.2008. Наташа заметила, что в записи этой даты сумма первых четырёх цифр равна сумме последних четырёх. Когда в этом году такое совпадение случится в последний раз?

5. (*Математический праздник, 2009, 6.1*) У 2009 года есть такое свойство: меняя местами цифры числа 2009, нельзя получить меньшее четырёхзначное число (с нуля числа не начинаются). В каком году это свойство впервые повторится снова?

В 2022 году

6. (*«Ломоносов», 2017, 5–6.4, 7–8.3*) Найдите двузначное число, цифры которого различны и квадрат которого равен кубу суммы его цифр.

7. (*Математический праздник, 1993, 6.4*) Если у числа x подсчитать сумму цифр и с полученным числом повторить это ещё два раза, то получится ещё три числа. Найдите самое маленькое x, для которого все четыре числа различны, а последнее из них равно 2.

2999

8. (*«Курчатов», 2018, 6.4*) Вася помнит, что его друг Петя живет на Курчатовской улице в доме номер 8, а номер квартиры забыл. На просьбу уточнить адрес Петя ответил: «Номер моей квартиры — трёхзначное число. Если переставить в нем цифры, то получится пять других трёхзначных чисел. Так вот, сумма этих пяти чисел будет в точности 2017». Помогите Васе вспомнить номер квартиры Пети.

9. (*Математический праздник, 1991, 6.5*) Найдите числа, равные удвоенной сумме своих цифр.

10. (*Математический праздник, 2002, 7.1*) 2002 год — год-палиндром, то есть одинаково читается справа налево и слева направо. Предыдущий год-палиндром был 11 лет назад (1991). Какое максимальное число годов-непалиндромов может идти подряд (между 1000 и 9999 годами)?

109

11. (*Математический праздник, 1996, 7.1*) По кругу расставлены цифры 1, 2, 3, …, 9 в произвольном порядке. Каждые три цифры, стоящие подряд по часовой стрелке, образуют трёхзначное число. Найдите сумму всех девяти таких чисел. Зависит ли она от порядка, в котором записаны цифры?

4995; не зависит

12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 7.1*) Некоторое трёхзначное число сложили с числом, записываемым теми же цифрами, но в обратном порядке, и получили 1777. Какие числа складывали?

839 и 938

13. (*«Ломоносов», 2011, 7–8.3*) Вычислите:

$$\left(4\cdot 10^{2011}-1\right):\left(4\cdot\underbrace{33\ldots3}_{2011}+1\right).$$

3

14. (*«Ломоносов», 2018, 5–6.4; 7–8.3; 9.1*) Назовём натуральное число n *квадратируемым*, если числа от 1 до n можно расставить в таком порядке, что каждый член последовательности в сумме со своим номером даёт точный квадрат. Например, число 5 квадратируемо, так как можно расставить числа так: 3 2 1 5 4, при этом $3+1=2+2=1+3=4$ и $5+4=4+5=9$. Выясните, какие из чисел 7, 9, 11, 15 являются квадратируемыми.

15. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.6, 7–8.7, 9.6*) Найдите все такие трёхзначные числа $\overline{\text{ПВГ}}$, состоящие из различных цифр П, В и Г, для которых выполняется равенство

$$\overline{\text{ПВГ}}=(\text{П}+\text{В}+\text{Г})(\text{П}+\text{В}+\text{Г}+1).$$

16. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–8.4; 9.5*) Найдите все четырёхзначные числа, которые на 7182 меньше числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке.

17. (*Московская устная олимпиада, 2013, 7.6*) На рисунке приведены три примера показаний исправных электронных часов. Сколько палочек могут перестать работать, чтобы время всегда можно было определить однозначно?

18. (*Московская устная олимпиада, 2002, 7.6*) Некоторые числа представимы в виде суммы $\overline{abc}+\overline{ab}+a$, а некоторые — нет. (Например, число 1001 представимо, поскольку $1001=993+99+9$. А числа 220 и 1514 — не представимы.) Сколько существует трёхзначных чисел, представимых в виде суммы $\overline{abc}+\overline{ab}+a$?

19. (*Московская устная олимпиада, 2017, 7.7*) Вася задумал двузначное число и сообщил Пете произведение цифр в записи этого числа, а Саше — сумму этих цифр. Между мальчиками состоялся такой диалог:

Петя: «Я угадаю задуманное число с трёх попыток, но двух мне может не хватить».

Саша: «Если так, то мне для этого хватит четырёх попыток, но трёх может не хватить».
Какое число было сообщено Саше?

20. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–8.7; 9.6*) Найдите наименьшее натуральное N такое, что десятичная запись числа $999N$ состоит из одних семёрок.

21. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–8.7; 9.6*) Найдите наименьшее натуральное число, оканчивающееся на цифру 2, которое удваивается, если переставить эту цифру в начало.