Да или нет?

1. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 6.2*) Среди четырёх людей нет трёх с одинаковым именем, или с одинаковым отчеством, или с одинаковой фамилией, но у каждых двух совпадает или имя, или отчество, или фамилия. Может ли такое быть?

2. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 6.3*) На доске написано число 20. За один ход разрешается либо удвоить число, либо стереть его последнюю цифру. Можно ли за несколько ходов получить число 25?

3. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 7.3*) На доске написано число 49. За один ход разрешается либо удваивать число, либо стирать его последнюю цифру. Можно ли за несколько ходов получить число 50?

4. Наташа нарисовала на доске трёх котиков. Потом в класс вошли 33 её одноклассника. Каждый из них или стёр одного котика, или дорисовал нового. Могло ли в конце получиться семь котиков?

5. Может ли сумма трёх чисел быть чётной, а произведение тех же трёх чисел — нечётным?

6. *Магический квадрат* — это квадрат, составленный из чисел, в котором суммы чисел в каждой строке, в каждом столбце и на каждой диагонали равны. Можно ли составить магический квадрат 5×5 из первых 25 простых чисел?

7. Может ли конь пройти с поля $a1$ на поле $h8$, побывав при этом на каждом из остальных полей ровно по одному разу?

8. В ряд растут восемь кустов смородины. Количества ягод на любых двух соседних кустах отличаются на 1. Может ли общее число ягод равняться 2013?

9. Непоседливый школьник разлил сок на клетчатый лист тетради размером 30×55 клеток. Могло ли после этого получиться, что испачканных клеток на 123 больше, чем чистых?

10. Можно ли заплатить без сдачи:

а) 20 рублей семью монетами по 1, 5 и 10 рублей?

б) 100 рублей сорока пятью монетами по 1 и 5 рублей?

в) 57 рублей двадцатью шестью монетами по 1 и 5 рублей?

11. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки «$+$» и «$-$» так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?

12. а) Можно ли соединить семь компьютеров проводами так, чтобы каждый из них был соединён ровно с тремя другими?

б) Можно ли так соединить шесть компьютеров?

13. Может ли прямая, не содержащая вершин замкнутой 11-звенной ломаной, пересекать все её звенья?

14. Кузнечик прыгает по прямой. В первый раз он прыгнул на 1 см в какую-то сторону, во второй раз — на 2 см, в третий — на 3 см, и так далее. Может ли кузнечик через 2014 прыжков вернуться в начальную точку?

15. На столе лежат десять монет: пять — орлом вверх, пять — орлом вниз. За один ход разрешается перевернуть любые две монеты. Можно ли добиться того, чтобы в какой-то момент все монеты оказались орлом вверх?

16. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр — названий этих городов — делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

17. Может ли произведение четырёх последовательных натуральных чисел оканчиваться на 116?

18. Может ли произведение числа и суммы его цифр равняться 4704?

19. Может ли натуральное число, записываемое с помощью 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть квадратом другого натурального числа?

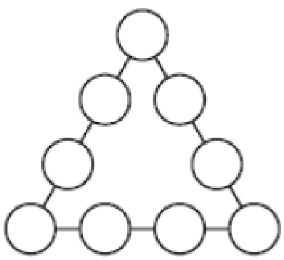
20. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 6.2*) Число 11 можно представить в виде суммы четырёх квадратов чисел только одним способом, не считая порядка слагаемых:

$$11 = 9 + 1 + 1 + 0 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2.$$

Можно ли число 99 представить в виде суммы четырёх квадратов двумя различными способами?

21. (*Всеросс., 2014, МЭ, 6.1*) В большой таблетке от жадности 11 г антивещества, в средней — 1,1 г, а в маленькой — 0,11 г. Доктор прописал Робину-Бобину съесть ровно 20,13 г антивещества. Сможет ли Робин-Бобин выполнить предписание доктора, съев хотя бы по одной таблетке каждого вида? (Если сможет, то объясните как, если не сможет, то почему.)

22. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–6.4*) Можно ли расставить числа 2016, 2017, ..., 2024 на указанные позиции (см. рисунок) так, чтобы сумма чисел, стоящих на каждой стороне треугольника, была одинаковой?



23. (*«Курчатов», 2015, 6.4*) Склеенный из двух единичных кубиков прямоугольный брусок $1 \times 1 \times 2$ перекатывают (через рёбра) по клетчатой доске 20×15. Можно ли прокатить его так, чтобы каждую клетку брусок покрыл ровно один раз? (Нельзя выходить за границы доски.)

24. (*Московская устная олимпиада, 2011, 6.4, 7.2*) Пусть на плоскости отмечено несколько точек. Назовём прямую *нечестной*, если она проходит ровно через три отмеченные точки и по разные стороны от неё отмеченных точек не поровну. Можно ли отметить 7 точек и провести для них 5 нечестных прямых?

25. (*Московская устная олимпиада, 2006, 6.4*) По кругу было записано 8 чисел. Затем между каждыми соседними числами записали их сумму, а старые числа стёрли. Могло ли оказаться так, что теперь по кругу записаны числа 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18?

26. (*Математический праздник, 2005, 6.5*) В числах `МИХАЙЛО` и `ЛОМОНОСОВ` каждая буква обозначает цифру (разным буквам соответствуют разные цифры). Известно, что у этих чисел произведения цифр равны. Могут ли оба числа быть нечётными?

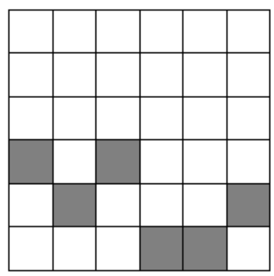
27. (*Московская устная олимпиада, 2004, 6.5*) В 6А классе учится 27 школьников. Им предложили посещать кружки по пению, молчанию и чтению стихов. Каждый хочет посещать один или несколько из этих кружков. Оказалось, что в каждый кружок желает ходить более трети класса. Можно ли составить такие списки кружков, что каждый будет ходить ровно в один кружок, в который хочет, и во всех кружках будет поровну школьников?

28. (*Московская устная олимпиада, 2005, 7.1*) У электромонтёра был кусок провода длиной 25 м, из которого утром он собирался вырезать необходимые для работы куски в 1 м, 2 м, 3 м, 6 м и 12 м. Но утром обнаружилось, что ночью какой-то хулиган разрезал провод на две части. Сможет ли монтёр выполнить намеченные работы?

29. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 7.2*) Три медвежонка делили три кусочка сыра массой 10 г, 12 г и 15 г. Лиса стала им помогать. Она может от любых двух кусочков одновременно откусить и съесть по 1 г сыра. Сможет ли лиса оставить медвежатам равные кусочки сыра?

30. (*«Курчатов», 2015, 7.2*) Можно ли какой-нибудь клетчатый квадрат разрезать по границам клеток на две фигуры одинакового периметра так, чтобы в одной фигуре клеток было ровно в 4 раза больше, чем в другой?

31. (*Математический праздник, 2013, 7.2*) В квадрате закрашена часть клеток, как показано на рисунке. Разрешается перегнуть квадрат по любой линии сетки, а затем разогнуть обратно. Клетки, которые при перегибании совмещаются с закрашенными, тоже закрашиваются. Можно ли закрасить весь квадрат:

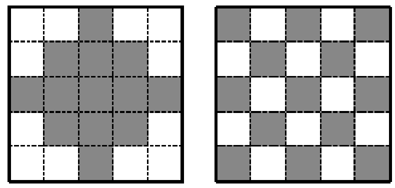


а) за 5 или менее;
б) за 4 или менее;
в) за 3 или менее таких перегибания?

(Если да, впишите в каждую клетку номер сгибания, после которого она будет закрашена впервые, линию сгиба проведите и пометьте той же цифрой. Если нет, докажите это.)

32. (*Математический праздник, 2005, 7.2*) Можно ли расставить числа
а) от 1 до 7;
б) от 1 до 9
по кругу так, чтобы любое из них делилось на разность своих соседей?

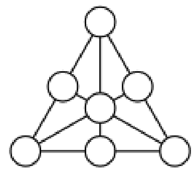
33. (*Всеросс., 2016, МЭ, 7.4*) За одну операцию можно поменять местами любые две строки или любые два столбца квадратной таблицы. Можно ли за несколько таких операций из закрашенной фигуры, изображённой на рисунке слева, получить закрашенную фигуру, изображённую на рисунке справа? Ответ обоснуйте.



34. (*Турнир Архимеда, 2012.4*) Можно ли вычеркнуть одно из натуральных чисел от 1 до 9, а оставшиеся числа расставить в вершинах куба так, чтобы суммы чисел на каждой грани куба были равны между собой, но не были кратны вычеркнутому числу?

35. (*Московская устная олимпиада, 2004, 7.4*) В 8А классе учится 27 школьников. Им предложили посещать кружки по пению, молчанию и чтению стихов. Каждый хочет посещать один или несколько из этих кружков. Оказалось, что в каждый кружок желает ходить более трети класса. Нужно распределить детей по кружкам так, чтобы каждый посещал только один кружок, причем из тех, которые хотел, и во всех кружках было поровну детей. Всегда ли это возможно?

36. (*Всеросс., 2015, МЭ, 7.5*) Можно ли в кружках (см. рисунок) разместить различные натуральные числа таким образом, чтобы суммы трёх чисел вдоль каждого отрезка оказались равными?



37. (*«Ломоносов», 2012, 7.5*) Можно ли разрезать три равных правильных шестиугольника так, чтобы из всех кусков можно было бы сложить оди правильный шестиугольник? Ответ обоснуйте.

38. (*«Курчатов», 2015, 7.5*) Вначале на каждой клетке шахматной доски 8×8 стоит по одной шашке — они считаются столбиками из одной шашки (а в процессе игры будут образовываться столбики и из нескольких шашек). За один ход разрешается переставить любой столбик ходом ферзя: по вертикали, горизонтали или диагонали *на столько клеток, сколько в нем шашек* (то есть, столбик из одной шашки ходит на соседнюю клетку, из двух шашек — прыгает через клетку и т. п.). Если столбик попал на непустую клетку, он ставится на верх стоящего там столбика и объединяется с ним. Можно ли за 63 хода собрать все шашки на одной клетке?

39. (*Математический праздник, 2010, 7.5*) а) Поросёнок Наф-Наф придумал, как сложить параллелепипед из одинаковых кубиков и оклеить его тремя квадратами без щелей и наложений. Сделайте это и вы.

б) А может ли Наф-Наф добиться, чтобы при этом каждые два квадрата граничили друг с другом?

40. (*Математический праздник, 2008, 7.5*) Серёжа вырезал из картона две одинаковые фигуры. Он положил их с нахлёстом на дно прямоугольного ящика. Дно оказалось полностью покрыто. В центр дна вбили гвоздь. Мог ли гвоздь проткнуть одну картонку и не проткнуть другую?