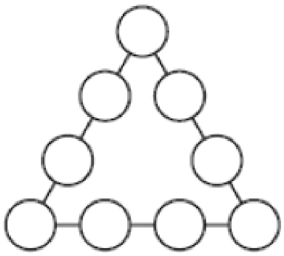
Да или нет?

1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 5–9*) Можно ли расставить числа 2016, 2017, ..., 2024 на указанные позиции (см. рисунок) так, чтобы сумма чисел, стоящих на каждой стороне треугольника, была одинаковой?



2. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 8*) Квадрат с вершинами в узлах сетки и сторонами длиной 2015, идущими по линиям сетки, разрезали по линиям сетки на несколько прямоугольников. Верно ли, что среди них есть хотя бы один прямоугольник, периметр которого делится на 4?

3. (*ММО, 2018, 8.1*) Существуют ли такие три попарно различных натуральных числа a, b и c, что числа $a+b+c$ и $a\cdot b\cdot c$ являются квадратами некоторых натуральных чисел?

4. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 9.6*) Вдоль трассы стоят 60 дорожных знаков. На каждом из них написана сумма расстояний до оставшихся 59 знаков. Возможно ли такое, что на знаках написаны 60 различных натуральных чисел? (Расстояния между знаками не обязательно целые.)

5. (*«Ломоносов», 2016, 9*) Можно ли нанести на грани двух кубиков неотрицательные целые числа так, чтобы при случайном бросании сумма выпавших очков могла быть равна любому целому числу от 1 до 36? Если это возможно, то в ответе укажите сумму всех 12 чисел на гранях; если невозможно — в ответе запишите 0.

6. (*Турнир городов, 2015, 8–9*) Есть 99 палочек с длинами 1, 2, 3, ..., 99. Можно ли из них сложить контур какого-нибудь прямоугольника?

7. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) Из одинаковых неравнобедренных прямоугольных треугольников составили прямоугольник (без дырок и наложений). Обязательно ли какие-то два из этих треугольников расположены так, что образуют прямоугольник?

8. (*«Ломоносов», 2012, 7–8*) Можно ли разрезать три равных правильных шестиугольника так, чтобы из всех кусков можно было бы сложить один правильный шестиугольник? Ответ обоснуйте.

9. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 7–9*) Нано-лягушка, перемещаясь по плоскости, может делать два вида действий: прыгать в направлении взгляда ровно на 1 метр и изменять направление взгляда на угол, кратный 45 градусам.

а) Докажите, что таким образом нано-лягушка может приблизиться к любой точке плоскости на расстояние, не превосходящее 1 нанометра.

б) Может ли нано-лягушка, перемещаясь таким образом, удалиться от точки, в которой она первоначально находилась, ровно на 2,5 метра?

10. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 7–9*) Квадратное табло состоит из 2012×2012 ячеек, каждая из которых может светиться или быть погашена. Известно, что можно переключать состояние на противоположное одновременно для всех ячеек на любой горизонтали, на любой вертикали и на любой (не обязательно большой) диагонали. Гарантированно ли (независимо от того, какие ячейки в начальный момент светились, а какие были погашены) такими переключениями можно перевести табло в состояние, когда все ячейки погашены?

11. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 7–9*) Можно ли сложить прямоугольный лист бумаги, согнув его несколько раз, и сделать один прямолинейный разрез так, что после разворачивания отрезанная часть превратится

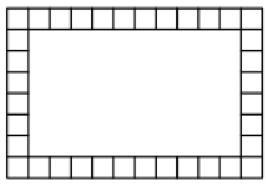
а) в правильный треугольник;

б) в равнобедренный треугольник с заданным углом при основании;

в) в треугольник с заданными углами?

12. (*Всеросс., 2015, МЭ, 8*) Графики трёх функций $y = ax + a$, $y = bx + b$ и $y = cx + d$ имеют общую точку, причём $a \neq b$. Обязательно ли $c = d$? Ответ обоснуйте.

13. (*Всеросс., 2015, МЭ, 8*) Из клетчатой бумаги вырезана прямоугольная рамка (см. рисунок). Её разрезали по границам клеток на девять частей и сложили из них квадрат 6×6. Могли ли все части, полученные при разрезании, оказаться различными? (*При складывании квадрата части можно переворачивать.*)



14. (*«Курчатов», 2015, 8*) Можно ли какой-нибудь клетчатый квадрат разрезать по границам клеток на две фигуры одинакового периметра так, чтобы в одной фигуре клеток было ровно в 8 раз больше, чем в другой?

15. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8*) Дана бесконечная последовательность:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

Можно ли выбрать из неё 100 чисел так, чтобы они образовывали арифметическую прогрессию?

16. (*«Высшая проба», 2013, 8*) Верхняя полуплоскость разбита на квадратные клетки. Костяшка домино занимает две соседние по стороне клетки. Можно ли заполнить некоторые из клеток неперекрывающимися костяшками домино так, чтобы в каждой строке и каждом столбце оказалось заполненным нечётное число клеток? Если можно, то опишите конфигурацию; если нет, то докажите, что нельзя.

17. (*ММО, 2014, 8*) Натуральные числа от 1 до 2014 как-то разбили на пары, числа в каждой из пар сложили, а полученные 1007 сумм перемножили. Мог ли результат оказаться квадратом натурального числа?

18. (*ММО, 2015, 8*) Будем называть натуральное число *почти квадратом*, если это либо точный квадрат, либо точный квадрат, умноженный на простое число. Могут ли 8 почти квадратов идти подряд?

19. (*«Курчатов», 2015, 8–9*) Вначале на каждой клетке шахматной доски 8×8 стоит по одной шашке — они считаются столбиками из одной шашки (а в процессе игры будут образовываться столбики и из нескольких шашек). За один ход разрешается переставить любой столбик ходом ладьи: по вертикали или горизонтали *на столько клеток, сколько в нем шашек* (то есть, столбик из одной шашки ходит на соседнюю клетку, из двух шашек — прыгает через клетку и т. п.). Если столбик попал на непустую клетку, он ставится на верх стоящего там столбика и объединяется с ним. Можно ли за 63 хода собрать все шашки на одной клетке?

20. (*«Высшая проба», 2014, 8–9*) Известно, что ни одно из чисел a, b, c не является целым. Может ли случиться так, что каждое из чисел ab, bc, ca, abc — целое?

21. (*«Высшая проба», 2013, 8–9*) Можно ли разрезать круг на части таким образом, чтобы а) центр круга находился на границе каждой из частей и б) из некоторых частей, полученных в результате разрезания, можно было составить вписанный в этот круг правильный шестиугольник? Если можно, то опишите разрезание и укажите, как составить шестиугольник из полученных частей; если нет, то докажите, что нельзя.

22. (*«Высшая проба», 2015, 8–9, 11*) В стране Лимпопо есть четыре национальные валюты: бананы (Б), кокосы (К), еноты ($\mathcal{E}$) и доллары (\$). Ниже приведены курсы обмена этих валют (одинаковые во всех обменных пунктах страны):

$$\text{Б} \underset{\frac{1}{2}}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{6}}{\overset{6}{\rightleftarrows}} \text{Б} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{11}}{\overset{11}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \$ \underset{\frac{1}{15}}{\overset{10}{\rightleftarrows}} \text{К}$$

Число на стрелке показывает, сколько единиц, указанных в конце стрелки, можно получить за единицу, указанную в начале стрелки. Например одного енота можно обменять на 6 бананов или на 11 кокосов, один доллар на 10 кокосов а один кокос — на $1/15$ доллара. (При решении задачи любую валюту можно дробить на сколь угодно мелкие части: например обменять $101/43$ енота на $606/43$ банана). Обмены $\$ \rightleftarrows \mathcal{E}$ и $\$ \rightleftarrows$ Б в Лимпопо запрещены.

Перевозить деньги через границу Лимпопо можно только в долларах. Дядя Вася приехал в Лимпопо, имея при себе 100 долларов. Он может выполнять указанные выше операции обмена валют неограниченное количество раз, но не имеет никаких других источников дохода. Может ли он разбогатеть и увезти из Лимпопо 200 долларов? Если да — объясните, как. Если нет, докажите.

23. (*Всеросс., 2017, МЭ, 9.1*) В зоопарке есть 10 слонов и огромные чашечные весы. Известно, что если любые четыре слона встанут на левую чашу весов, а любые три — на правую, то левая чаша перевесит. Пять слонов встали на левую чашу и четыре — на правую. Обязательно ли левая чаша перевесит?

24. (*Всеросс., 2017, МЭ, 10.3*) В зоопарке есть 10 слонов и огромные чашечные весы. Известно, что если любые четыре слона встанут на левую чашу весов, а любые три — на правую, то левая чаша перевесит. Три слона встали на левую чашу и два — на правую. Обязательно ли левая чаша перевесит?

25. (*«Курчатов», 2015, 9*) Можно ли какой-нибудь клетчатый квадрат разрезать по границам клеток на две фигуры одинакового периметра так, чтобы в одной фигуре клеток было ровно в 8,5 раз больше, чем в другой?

26. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9*) Даны 2015 попарно взаимно простых натуральных чисел, не превосходящих 10^7. Могут ли они все быть составными?

27. (*«Ломоносов», 2015, 9*) Последовательность задана рекуррентным соотношением $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} + 3$. Может ли число $a_{2015} - a_{2011} - 39$ быть простым?

28. (*«Высшая проба», 2012, 9*) На плоскости отмечены восемь точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Может ли быть так, что более одной пятой всех выпуклых четырёхугольников с вершинами в этих точках — параллелограммы?

29. (*Всеросс., 2014, РЭ, 9*) По кругу расставлены 111 различных натуральных чисел, не превосходящих 500. Могло ли оказаться, что для каждого из этих чисел его последняя цифра совпадает с последней цифрой суммы всех остальных чисел?

30. (*Олимпиада ВШЭ, 2011, 9–10*) Числа от 1 до 2011 выписаны в ряд в порядке возрастания. Можно ли между ними расставить знаки $+$ и $-$ так, чтобы значение полученного выражения было полным квадратом?

31. (*Олимпиада ВШЭ, 2011, 9–11*) Существует ли квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ такой, что $f(0) = 2011$, $f(2011) = 0$, а значения во всех натуральных степенях двойки делятся на 3? (Т. е. $f(2^n)$ делится на 3 при каждом натуральном n.)

32. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 10*) Число a на 1 больше числа b. Могут ли числа a^2 и b^2 быть равными?

33. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 10*) В квадрате со стороной 5 произвольным образом отметили 201 точку. Верно ли, что какие-то 5 точек можно накрыть квадратом со стороной 1?

34. (*Всеросс., 2016, МЭ, 10*) В клетках квадрата 3×3 записаны буквы (см. рисунок). Можно ли их расставить так, чтобы любые две буквы, исходно отстоявшие на ход коня, после перестановки оказались в клетках, отстоящих на ход короля? (Например, из клетки с буквой a конь может пойти в клетки с буквами f и h, а король — в клетки с буквами b, d и e.)

a	b	c
d	e	f
g	h	i

35. (*Всеросс., 2017, РЭ, 9.3*) Существует ли треугольник, для сторон x, y, z которого выполнено соотношение
$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y)(y + z)(z + x)\,?$$

36. (*«Высшая проба», 2014, 10*) Могут ли ненулевые числа x, y и z удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + x = y^2 - y, \\ y^2 + y = z^2 - z, \\ z^2 + z = x^2 - x\,? \end{cases}$$

37. (*«Высшая проба», 2012, 10*) Существует ли набор выпуклых четырёхугольников, который является набором всех граней как двух выпуклых многогранников, так и одного?

38. (*«Высшая проба», 2015, 10*) В стране Лимпопо есть четыре национальные валюты: бананы (Б), кокосы (К), еноты ($\mathcal{E}$) и доллары (\$). Ниже приведены курсы обмена этих валют (одинаковые во всех обменных пунктах страны):

$$\text{Б} \underset{\frac{1}{2}}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{6}}{\overset{6}{\rightleftarrows}} \text{Б} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{11}}{\overset{11}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \$ \underset{\frac{1}{15}}{\overset{10}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \$ \underset{\frac{1}{7}}{\overset{5}{\rightleftarrows}} \text{Б}$$

Число на стрелке показывает, сколько единиц, указанных в конце стрелки, можно получить за единицу, указанную в начале стрелки. Например одного енота можно обменять на 6 бананов или на 11 кокосов, один доллар на 10 кокосов а один кокос — на $1/15$ доллара. (При решении задачи любую валюту можно дробить на сколь угодно мелкие части: например обменять $101/43$ енота на $606/43$ банана). Обмены $\$ \rightleftarrows \mathcal{E}$ в Лимпопо запрещены.

Перевозить деньги через границу Лимпопо можно только в долларах. Дядя Вася приехал в Лимпопо, имея при себе 100 долларов. Он может выполнять указанные выше операции обмена валют неограниченное количество раз, но не имеет никаких других источников дохода. Может ли он разбогатеть и увезти из Лимпопо 200 долларов? Если да — объясните, как. Если нет, докажите.

39. (*Всеросс., 2014, МЭ, 10*) В клетки таблицы размером 9×9 расставили все натуральные числа от 1 до 81. Вычислили произведения чисел в каждой строке таблицы и получили набор из девяти чисел. Затем вычислили произведения чисел в каждом столбце таблицы и также получили набор из девяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

40. (*«Курчатов», 2015, 10–11*) Митя сложил все нечётные натуральные делители некоторого чётного числа N (включая единицу), а Ваня сложил все чётные натуральные делители числа N (включая само число). Затем Ванину сумму умножили на Митину. Может ли произведение быть квадратом натурального числа?

41. (*ОММО, 2012*) На 100 мест за круглым столом посадили 50 мужчин и 50 женщин. Будем называть человека *довольным*, если у него есть сосед противоположного пола. Может ли отношение числа довольных мужчин к числу довольных женщин быть больше 1,9?

42. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Заданы 2014 натуральных чисел. Если выбрать из них любые 100 чисел, то среди них окажется хотя бы одно чётное число. Если выбрать из них любые 1916 чисел, то среди них окажется хотя бы одно нечётное число. Может ли сумма всех этих чисел равняться $2014 \cdot 2013$? Ответ обоснуйте.

43. (*«Курчатов», 2015, 10–11*) Вначале на каждой клетке доски 100×100 стоит по одной шашке — они считаются столбиками из одной шашки (а в процессе игры будут образовываться столбики и из нескольких шашек). За один ход разрешается переставить любой столбик ходом ладьи: по вертикали или горизонтали *на столько клеток, сколько в нем шашек* (то есть, столбик из одной шашки ходит на соседнюю клетку, из двух шашек — прыгает через клетку и т. п.). Если столбик попал на непустую клетку, он ставится на верх стоящего там столбика и объединяется с ним. Можно ли за 9999 ходов собрать все шашки на одной клетке?

44. (*ОММО, 2011*) Ваня сдал три ЕГЭ. По русскому языку он набрал на 5 баллов меньше, чем по физике, а по физике — на 9 баллов меньше, чем по математике. Золотая рыбка, приснившаяся Ване, обещала выполнить любое количество желаний следующих видов:

1) прибавить по баллу за каждый экзамен;

2) за один экзамен (по выбору Вани) уменьшить баллы на 3, а за каждый из двух остальных — увеличить на 1.

Рыбка выполняет желание, если при этом ни один результат не превысит 100 баллов. Мог ли Ваня во сне набрать 100 баллов более чем по одному экзамену?

45. (*«Ломоносов», 2009*) Можно ли данный двугранный угол величиной 90° пересечь плоскостью так, чтобы в полученном сечении образовался угол величиной 130°?

46. (*«Высшая проба», 2014, 11*) Через вершины правильного шестиугольника проведены шесть различных параллельных прямых. Может ли оказаться так, что все попарные расстояния между этими прямыми являются целыми числами?

47. (*«Ломоносов», 2010*) На доске написан квадратный трёхчлен $x^2 + 9x + 47$. Таня (по своему усмотрению) увеличивает или уменьшает на 1 коэффициент при x, после чего Ваня увеличивает или уменьшает на фиксированное число m свободный член, а далее эти действия повторяются. Как только написанный на доске многочлен имеет целый корень, Ваня получает оценку «пять». Может ли он обеспечить себе «пятёрку» при любых действиях Тани, если а) $m = 2$; б) $m = 3$?

48. (*«Курчатов», 2015, 11*) Для приготовления картофельного пюре повару Коле надо как можно быстрее получить заданный объём очищенной картошки. Не заботясь об экономии очисток, он из шарообразных картофелин вырезает кубики, каждым взмахом ножа очищая по одной грани. Может ли он справиться с заданием быстрее при той же частоте взмахов ножа, если будет вырезать какие-нибудь другие многогранники? (Формально: верно ли, что из всех многогранников, вырезаемых из данного шара, наибольшее отношение объема к числу граней — у вписанного куба?)

49. (*«Курчатов», 2014, 11*) На квадратной пластинке со стороной 1 см сидит вирус-невидимка Вася. Он и доктор Петя ходят по очереди. Очередным n-м ходом Петя рисует вакциной как чернилами отрезок длиной 1 микрон, а затем Вася должен выбрать направление и проползти в этом направлении *по прямой* расстояние $1/n$ микрона (не выходя за край пластинки). Если Вася проползёт через любую из точек с вакциной или коснётся её, он погибнет. Петя может действовать с любой точностью. Может ли он за конечное число ходов наверняка погубить вирус?

50. (*ММО, 2015, 11*) Все грани шестигранника — четырёхугольники, а в каждой его вершине сходятся по три ребра. Верно ли, что если для него существуют вписанная и описанная сферы, центры которых совпадают, то этот шестигранник — куб?

51. (*Всеросс., 2015, финал, 11*) Бессмертная блоха прыгает по целым точкам на числовой прямой, стартуя с точки 0. Длина первого прыжка равна 3, второго — 5, третьего — 9, и так далее (длина k-го прыжка равна $2k + 1$). Направление прыжка (вправо или влево) блоха выбирает самостоятельно. Может ли так случиться, что блоха рано или поздно побывает в любой натуральной точке (возможно, побывав в некоторых точках больше, чем по разу)?