

Подсчёт двумя способами

В некоторых задачах можно получить нужное уравнение, если вычислить двумя способами одну и ту же величину. Трудность состоит в том, чтобы додуматься — какую именно величину подсчитывать двумя способами.

ЗАДАЧА 1. Тридцать школьников — семиклассников и восьмиклассников — обменялись рукопожатиями. При этом оказалось, что каждый семиклассник пожал руку восьми восьмиклассникам, а каждый восьмиклассник пожал руку семи семиклассникам. Сколько было семиклассников и сколько восьмиклассников?

РЕШЕНИЕ. Пусть x — число семиклассников, y — число восьмиклассников; тогда $x + y = 30$. Второе уравнение мы получим, если подсчитаем двумя способами общее количество рукопожатий. С одной стороны, число рукопожатий равно $8x$, поскольку от каждого семиклассника «исходит» 8 рукопожатий. С другой стороны, число рукопожатий равно $7y$, так как от каждого восьмиклассника «исходит» 7 рукопожатий. Следовательно, $8x = 7y$. Решая полученную систему уравнений, находим: $x = 14$, $y = 16$.

ЗАДАЧА 2. (*Турнир им. Ломоносова, 1985*) Было 7 пустых ящиков. В некоторые из них положили еще по 7 пустых ящиков и т. д. В итоге стало 10 непустых ящиков. Сколько всего стало ящиков?

РЕШЕНИЕ. Если ящик A лежит непосредственно в ящике B , то будем говорить, что из ящика A в ящик B идёт стрелка. Пусть всего стало x ящиков. Подсчитаем двумя способами общее количество стрелок. С одной стороны, оно равно $x - 7$, поскольку из каждого ящика, кроме начальных семи, выходит ровно одна стрелка. С другой стороны, число стрелок равно $10 \cdot 7 = 70$, поскольку в каждый из 10 непустых ящиков входит ровно 7 стрелок (а ни в какой пустой ящик стрелка не входит). Следовательно, $x - 7 = 70$, откуда $x = 77$.

Данную задачу можно решить и по-другому. На каждом шаге процесса заполняется ровно один ящик — в него кладутся 7 ящиков. Поскольку вначале все ящики пусты, сделано 10 шагов, то есть добавлено 70 ящиков. Плюс семь начальных — итого 77 ящиков.

Задачи

1. (*«Физтех», 2013, 8–11*) В большую коробку положили 10 коробок поменьше. В некоторые из них положили 10 коробок ещё поменьше. В некоторые из этих последних коробок положили 10 коробок ещё меньшего размера и так далее. В результате оказалось, что имеется ровно 2000 коробок, в которых что-то лежит. Какое наибольшее число коробок могут при этом быть пустыми?

10081

2. (*Турнир им. Ломоносова, 1985*) В классе каждый мальчик дружит ровно с двумя девочками, а каждая девочка — ровно с тремя мальчиками. Ещё известно, что в классе 31 пионер и 19 парт. Сколько человек в этом классе?

33

3. (*Математический праздник, 1996, 7*) По кругу расставлены цифры 1, 2, 3, ..., 9 в произвольном порядке. Каждые три цифры, стоящие подряд по часовой стрелке, образуют трёхзначное число. Найдите сумму всех девяти таких чисел. Зависит ли она от порядка, в котором записаны цифры?

4995; не зависит

4. (*Математический праздник, 1996, 7*) Футбольный мяч шит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутков белого цвета?

20

5. (*Математический праздник, 1998, 7*) В банановой республике прошли выборы в парламент, в котором участвовали все жители. Все голосовавшие за партию «Мандарин» любят мандарины. Среди голосовавших за другие партии 90% не любят мандарины. Сколько процентов голосов набрала партия «Мандарин» на выборах, если ровно 46% жителей любят мандарины?

40%

6. (*Математический праздник, 2010, 7*) В конкурсе пения участвовали Петух, Ворона и Кукушка. Каждый член жюри проголосовал за одного из трех исполнителей. Дятел подсчитал, что в жюри было 59 судей, причем за Петуха и Ворону было в сумме подано 15 голосов, за Ворону и Кукушку — 18 голосов, за Кукушку и Петуха — 20 голосов. Дятел считает плохо, но каждое из четырёх названных им чисел отличается от правильного не более чем на 13. Сколько судей проголосовали за Ворону?

13

7. (*«Физтех», 2014, 7–8*) Олег с папой пошли в тир. Они договорились, что Олег делает шесть выстрелов и за каждое попадание в цель получает право сделать ещё два выстрела. Всего Олег сделал 20 выстрелов. Сколько раз он попал в цель?

7

8. (*«Физтех», 2014, 7–8*) У Царя Гороха было четверо сыновей, а дочерей не было. Его потомки тоже не имели дочерей, среди них 25 имели каждый по три сына, а у остальных вообще не было детей. Сколько потомков было у царя Гороха?

62

9. (*Турнир городов, 2013, 8–9*) Про группу из пяти человек известно, что: Алёша на 1 год старше Алексева, Боря на 2 года старше Борисова, Вася на 3 года старше Васильева, Гриша на 4 года старше Григорьева, а ещё в этой группе есть Дима и Дмитриев. Кто старше и на сколько: Дима или Дмитриев?

Дмитриев старше Димы на 10 лет

10. (*Всеросс., 2012, II этап, 11*) Туристическая фирма провела акцию: «Купи путёвку в Египет, приведи четырёх друзей, которые также купят путёвку, и получи стоимость путёвки обратно». За время действия акции 13 покупателей пришли сами, остальных привели друзья. Некоторые из них привели ровно по 4 новых клиента, а остальные 100 не привели никого. Сколько туристов отправились в Страну Пирамид бесплатно?

67

11. (*Олимпиада им. Леонарда Эйлера, 2015, регион*) Разрешается вырезать из шахматной доски размером 20×20 любые 18 клеток, а потом выставить на оставшиеся клетки несколько ладей, не бьющих друг друга. Какое наибольшее число ладей можно выставить таким образом? Ладьи бьют друг друга, если они стоят на одной горизонтали или вертикали доски и между ними нет вырезанных клеток.

88