

Конкурентность

В любом треугольнике медианы, высоты, биссектрисы и серединные перпендикуляры к сторонам являются *конкурентными*, то есть пересекаются в одной точке.

Этот факт часто используется при решении задач: например, если в треугольнике ABC известно, что AA_1 и BB_1 — высоты, и пересекаются они в точке H , то $CH \perp AB$.

ЗАДАЧА 1. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2011, 8–9*) Биссектриса угла B и биссектриса внешнего угла D прямоугольника $ABCD$ пересекают сторону AD и прямую AB в точках M и K соответственно. Докажите, что отрезок MK равен и перпендикулярен диагонали прямоугольника.

ЗАДАЧА 2. (*Турнир городов, 2015, 8–9*) На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка K , а на стороне BC — точка L так, что $KB = LC$. Отрезки AL и CK пересекаются в точке P . Докажите, что отрезки DP и KL перпендикулярны.

ЗАДАЧА 3. (*Олимпиада им. Эйлера, 2016, регион*) В трапеции $ABCD$ точка M — середина основания AD . Известно, что $\angle ABD = 90^\circ$ и $BC = CD$. На отрезке BD выбрана точка F такая, что $\angle BCF = 90^\circ$. Докажите, что $MF \perp CD$.

ЗАДАЧА 4. (*ММО, 2012, 8–9*) В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD . На отрезке BH отметили точку M , равноудалённую от точек C и D . Пусть K — середина стороны AB . Докажите, что угол MKD прямой.

ЗАДАЧА 5. (*ММО, 2014, 8*) В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны CD . Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM , а через точку M — прямую, перпендикулярную диагонали BD . Докажите, что два проведённых перпендикуляра пересекаются на прямой AD .

ЗАДАЧА 6. (*ММО, 2011, 8*) Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Перпендикуляр, опущенный из точки M на диагональ AC , и перпендикуляр, опущенный из точки N на диагональ BD , пересекаются в точке P . Докажите, что $PA = PD$.

ЗАДАЧА 7. (*Турнир городов, 2011, 8–9*) В остроугольном треугольнике ABC на высоте BH выбрана произвольная точка P . Точки A' и C' — середины сторон BC и AB соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A' на CP , пересекается с перпендикуляром, опущенным из C' на AP , в точке K . Докажите, что точка K равноудалена от точек A и C .