

Комбинированные уравнения и неравенства. 2

1. (МГУ, ВШБ, 2004) Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}}(2 \sin x) + \log_2(\sqrt{3} \cos x) = -1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{u\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{2}$$

2. (МГУ, экономич. ф-т, 2005) Решите уравнение

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{9}} \operatorname{ctg} \frac{2x}{9}} + \sqrt{\log_{\frac{1}{9}} \sin 4x} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{2}{u\sqrt{6}} + \frac{8}{u\sqrt{6}}$$

3. (МГУ, мехмат, 1998) Решите уравнение

$$3 \cdot 2^{\cos x + 3\sqrt{1-\sin^2 x}} + 11 \cdot 2^{2\cos x} - 34 = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\sqrt{2} + \frac{x}{2}$$

4. (МГУ, ИСАА, 2008) Найти корни уравнения

$$\cos \frac{4\pi}{x} + \sin \frac{8\pi}{x} = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{x} \right),$$

удовлетворяющие неравенству $\log_{x+2}(x^2 - 2x + 4) \leq 1$.

$$-\frac{8}{8} - \frac{24}{19} - \frac{5}{8}$$

5. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Найдите корни уравнения

$$\log_2 |\operatorname{tg} \pi x| + \log_4 \frac{\cos \pi x}{2 \cos \pi x + \sin \pi x} = 0,$$

принадлежащие отрезку $[\frac{9}{4}; 3]$.

$$2 + \frac{\frac{11}{2} \operatorname{arctg} 2}{\frac{7}{4}}$$

6. («Покори Воробьёвы горы!», 2011) Решите уравнение

$$(3 \log_{|5x-3|} 2 \cdot \log_2 |5x-3| - x) \sqrt{5x^2 - 9x + 4} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni 1$$

7. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Найдите все значения x , при каждом из которых выражения

$$\log_{2012} \left(\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} + \operatorname{ctg} x \right) \quad \text{и} \quad \log_{2013} \left(\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} - \operatorname{ctg} x \right)$$

равны друг другу.

$$\boxed{\mathbb{Z} \ni u \cdot \operatorname{ctg} x + \frac{x}{\pi} = x}$$

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Найти все пары вещественных чисел (x, y) , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} (2 - \sqrt{3})^x = 3^y + 4^y, \\ \sqrt{-x^2 - 3xy - y^2} = 2y + \frac{x}{2}. \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{x}{\pi} = n \cdot \pi - x}$$

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Найдите количество корней уравнения

$$3^{\frac{3 \sin x - 2}{2 \sin x - 1}} - 2 = 3^{\frac{1 - \sin x}{2 \sin x - 1}},$$

принадлежащих промежутку $[-\frac{\pi}{2}; 13\pi]$.

□

10. («Покори Воробьёвы горы!», 2012) Решите систему

$$\begin{cases} 4 \cos^2 x + \cos^2 5y = 4 \cos x \cos^6 5y, \\ \lg(x - y)^2 < 2 \lg(2\pi) - \lg 5 - \lg 45. \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbb{Z} \ni y \cdot \left(\operatorname{ctg} x + \frac{x}{\pi} - \operatorname{ctg} 5y + \frac{5y}{\pi} \right) \cdot \left(\operatorname{ctg} x + \frac{x}{\pi} + \operatorname{ctg} 5y + \frac{5y}{\pi} \right)}$$

11. («Физтех», 2011) Решите уравнение

$$\log_{\operatorname{tg} x} (\operatorname{ctg} x - 2) + \log_{(\operatorname{ctg} x - 2)} \sqrt{\operatorname{tg} x} = \frac{3}{2}.$$

$$\boxed{\mathbb{Z} \ni y \cdot \operatorname{ctg} x + \frac{x}{\pi} = \operatorname{ctg} x + (1 - 2\sqrt{2}) \operatorname{ctg} x}$$

12. («Физтех», 2009) Решите неравенство

$$\left| 4^{\sqrt{x+3} - \frac{1}{2}} - 2 \right| + \frac{10}{3} \leq \frac{4^{\sqrt{x+3} + \frac{3}{2}}}{3} - 16^{\sqrt{x+3} - \frac{1}{2}}.$$

$$\boxed{\left[\frac{x}{8} - ; \frac{x}{11} - \right]}$$

13. (СПбГУ, 2011) Найти все целые решения уравнения

$$\cos \left(\frac{1000! \cdot \pi}{2^x} \right) = 0.$$

□966

14. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) Найдите все x из отрезка $[0; 2\pi]$, для которых

$$\log_{\sin x} \cos x > \log_{\operatorname{ctg} x} \cos x.$$

$$\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{1-\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$$

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2006) Решите уравнение

$$\log_{\cos x} \frac{4(1 - \sin x)}{3} = 2.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi \zeta + \frac{\pi}{4} \text{ и } \pi \zeta$$

16. («Ломоносов», 2006) Решите неравенство

$$(1 - \operatorname{ctg} x)^{2006} + 4(1 + \operatorname{ctg} x)^{2004} \leq 2^{2006}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \left[u\pi + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, u\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right]$$

17. («Ломоносов», 2005) Решите уравнение

$$\log_4(4 \operatorname{ctg}^2 x) - \log_2(-2 \sin 2x) = 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}$$