

Комбинированные уравнения и неравенства. 1

Настоящая статья посвящена уравнениям и неравенствам, в которых переменная присутствует как под знаком корня, так и под знаком модуля. Никаких новых методов здесь нет; в разбираемых задачах мы увидим совместную работу тех идей и приёмов, которые уже знакомы вам по предыдущим статьям.

Задача 1. (МФТИ, 2007) Решить уравнение

$$5\sqrt{1 + |x^2 - 1|} = 3 + |5x + 3|.$$

РЕШЕНИЕ. Замена $t = 5x$ приводит к уравнению

$$\sqrt{25 + |t^2 - 25|} = 3 + |t + 3|. \quad (1)$$

Точками перемены знака хотя бы одного из выражений под модулем служат значения $t = \pm 5$ и $t = 3$. Соответственно, рассматриваем четыре промежутка.

1. Если $t \leq -5$, то левая часть уравнения (1) равна $\sqrt{t^2} = |t| = -t$, и уравнение принимает вид

$$-t = 3 - t - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0.$$

Получилось верное числовое равенство, которое означает, что все значения $t \leq -5$ являются решениями уравнения (1).

2. Если $-5 \leq t \leq -3$, то уравнение (1) принимает вид

$$\sqrt{50 - t^2} = -t.$$

Легко видеть, что это уравнение имеет единственный корень $t = -5$, который мы уже получили выше.

3. Если $-3 \leq t \leq 5$, то уравнение (1) принимает вид

$$\sqrt{50 - t^2} = t + 6.$$

Правая часть полученного уравнения положительна при рассматриваемых t , поэтому оно равносильно уравнению

$$50 - t^2 = (t + 6)^2 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + 6t - 7 = 0$$

с корнями 1 и -7 , из которых лишь $t = 1$ принадлежит рассматриваемому промежутку и потому служит решением уравнения (1).

4. Наконец, если $t \geq 5$, то уравнение (1) примет вид

$$t = 3 + t + 3,$$

а такое уравнение не имеет решений.

Итак, решениями уравнения (1) служат значения $t \leq -5$ и $t = 1$. Остаётся сделать обратную замену $x = t/5$ и записать ответ.

ОТВЕТ: $(-\infty; -1] \cup \{\frac{1}{5}\}$.

ЗАДАЧА 2. (МГУ, физический ф-т, 2005) Решите систему

$$\begin{cases} y + 2\sqrt{x+y} = 15 - x, \\ |x - 2(2y + 1)| + 3|x - 4(y - 1)| = 6. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Преобразуем первое уравнение:

$$(x + y) + 2\sqrt{x+y} + 1 = 16 \Leftrightarrow (\sqrt{x+y} + 1)^2 = 16,$$

что с учётом положительности выражения $\sqrt{x+y} + 1$ равносильно уравнению

$$\sqrt{x+y} + 1 = 4 \Leftrightarrow x + y = 9. \quad (2)$$

Перейдём ко второму уравнению системы:

$$|x - 4y - 2| + 3|x - 4y + 4| = 6,$$

которое после замены $t = x - 4y$ примет вид

$$|t - 2| + 3|t + 4| = 6. \quad (3)$$

Если $t \leq -4$, то уравнение (3) равносильно

$$2 - t - 3(t + 4) = 6 \Leftrightarrow t = -4;$$

это значение годится. Если $-4 \leq t \leq 2$, то (3) равносильно

$$2 - t + 3(t + 4) = 6 \Leftrightarrow t = -4;$$

то же самое. Наконец, если $t \geq 2$, то (3) равносильно

$$t - 2 + 3(t + 4) = 6 \Leftrightarrow t = -1;$$

это не годится. Итак, уравнение (3) имеет единственный корень $t = -4$, откуда

$$x - 4y = -4. \quad (4)$$

В результате получаем систему уравнений (2) и (4), равносильную исходной системе:

$$\begin{cases} x + y = 9, \\ x - 4y = -4. \end{cases}$$

Данная система решается элементарно.

ОТВЕТ: $(\frac{32}{5}, \frac{13}{5})$.

ЗАДАЧА 3. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Решите неравенство

$$\sqrt{7-x} \cdot |x^2 - 3| \leq \sqrt{7-x} \cdot |x^2 - 14x + 27|.$$

РЕШЕНИЕ. ОДЗ неравенства есть множество $x \leq 7$. Заметим, что $x = 7$ является решением. При $x < 7$ сокращение нашего неравенства на положительную величину $\sqrt{7-x}$ приводит к равносильному неравенству

$$\begin{aligned} |x^2 - 3| \leq |x^2 - 14x + 27| &\Leftrightarrow (x^2 - 3)^2 \leq (x^2 - 14x + 27)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((x^2 - 3) - (x^2 - 14x + 27))((x^2 - 3) + (x^2 - 14x + 27)) \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (7x - 15)(x^2 - 7x + 12) \leq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{15}{7}\right)(x - 3)(x - 4) \leq 0, \end{aligned}$$

которое легко решается методом интервалов: $x \leq \frac{15}{7}$, $3 \leq x \leq 4$. Все эти значения x удовлетворяют ограничению $x < 7$ и потому являются решениями исходного неравенства.

ОТВЕТ: $(-\infty; \frac{15}{7}] \cup [3; 4] \cup \{7\}$.

ЗАДАЧА 4. (МГУ, физический ф-т, 2000) Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 + |1 - x| - 2} > x - 1. \quad (5)$$

РЕШЕНИЕ. Пусть сначала $x \in E_1 = (-\infty; 1)$. Тогда неравенство (5) равносильно неравенству

$$\sqrt{x^2 + (1 - x) - 2} > x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 1} > x - 1.$$

Правая часть полученного неравенства отрицательна при рассматриваемых x , поэтому оно равносильно на множестве E_1 неравенству

$$x^2 - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \\ x \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

В пересечении с множеством E_1 (с учётом того, что $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 1$ и $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1$) получаем часть решений неравенства (5):

$$x \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \quad (6)$$

Пусть теперь $x \in E_2 = [1; +\infty)$. В этом случае неравенство (5) равносильно неравенству

$$\sqrt{x^2 + x - 3} > x - 1,$$

которое ввиду неотрицательности своей правой части равносильно на множестве E_2 неравенству

$$x^2 + x - 3 > (x - 1)^2 \Leftrightarrow x > \frac{4}{3}. \quad (7)$$

Все эти значения x принадлежат множеству E_2 и потому служат решениями неравенства (5). Остаётся объединить множества (6) и (7).

ОТВЕТ: $(-\infty; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}] \cup (\frac{4}{3}; +\infty)$.

ЗАДАЧА 5. (МГУ, ВМК, 1994) Решить неравенство

$$\sqrt{x - 3} \leq 3 - |x - 6|.$$

РЕШЕНИЕ. Не составляет труда и здесь снять модуль на двух промежутках, решая в каждом случае простое иррациональное неравенство. Но в этой задаче можно поступить изящнее. Сделаем замену $t = \sqrt{x-3}$ и придём к неравенству

$$t \leq 3 - |t^2 - 3| \Leftrightarrow |t^2 - 3| \leq 3 - t \quad (8)$$

при ограничении

$$t \geq 0. \quad (9)$$

Как вы знаете из статьи «[Неравенства с модулем](#)», неравенство (8) равносильно системе

$$\begin{aligned} \begin{cases} t^2 - 3 \leq 3 - t, \\ t^2 - 3 \geq t - 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + t - 6 \leq 0, \\ t^2 - t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (t+3)(t-2) \leq 0, \\ t(t-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq t \leq 2, \\ \begin{cases} t \leq 0, \\ t \geq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq t \leq 0, \\ 1 \leq t \leq 2, \end{cases} \end{aligned}$$

откуда с учётом ограничения (9) имеем $t = 0$ или $1 \leq t \leq 2$. Теперь обратная замена:

$$\begin{cases} \sqrt{x-3} = 0, \\ 1 \leq \sqrt{x-3} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ 4 \leq x \leq 7. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\{3\} \cup [4; 7]$.

ЗАДАЧА 6. («Физтех», 2013) Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{|x+2|-1}} \leq \frac{1}{5+x}. \quad (10)$$

РЕШЕНИЕ. Найдём ОДЗ данного неравенства:

$$\begin{cases} |x+2|-1 > 0, \\ 5+x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < -3, \\ x > -1, \\ x \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -5, \\ -5 < x < -3, \\ x > -1. \end{cases} \end{cases}$$

Заметим, что при $x < -5$ неравенство (10) не имеет решений, поскольку его левая часть положительна, а правая — отрицательна. Поэтому будем решать наше неравенство на множестве $E = (-5; -3) \cup (-1; +\infty)$.

Оба знаменателя в (10) положительны при $x \in E$; умножая неравенство на положительную величину $(5+x)\sqrt{|x+2|-1}$, получим равносильное на множестве E неравенство

$$\sqrt{|x+2|-1} \geq 5+x,$$

которое ввиду условия $5+x > 0$ равносильно на E неравенству

$$|x+2|-1 \geq (5+x)^2 \Leftrightarrow |x+2| \geq x^2 + 10x + 26,$$

эквивалентное в свою очередь (снова вспоминаем статью «[Неравенства с модулем](#)») совокупности

$$\begin{cases} x+2 \geq x^2 + 10x + 26, \\ x+2 \leq -(x^2 + 10x + 26) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 9x + 24 \leq 0, \\ x^2 + 11x + 28 \leq 0. \end{cases}$$

Первое неравенство этой совокупности не имеет решений (дискриминант отрицателен), а решения второго неравенства составляют отрезок $-7 \leq x \leq -4$. Пересекая этот отрезок с множеством E , получаем множество $-5 < x \leq -4$ решений неравенства (10).

ОТВЕТ: $(-5; -4]$.

ЗАДАЧА 7. («Ломоносов», 2007) Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x+8} - |2x+1|}{\sqrt{7-x} - |2x+1|} \geq 1. \quad (11)$$

РЕШЕНИЕ. Радикалы определены при

$$\begin{cases} x+8 \geq 0, \\ 7-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -8 \leq x \leq 7.$$

Поэтому решаем неравенство (11) на множестве $E = [-8; 7]$. Преобразуем:

$$\frac{\sqrt{x+8} - |2x+1|}{\sqrt{7-x} - |2x+1|} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{7-x}}{\sqrt{7-x} - |2x+1|} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{7-x}}{\sqrt{7-x} - \sqrt{(2x+1)^2}} \geq 0. \quad (12)$$

Последнее преобразование понадобилось нам вот зачем. Поскольку функция $y = \sqrt{x}$ монотонно возрастает, знак разности $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ совпадает со знаком разности $A - B$. Следовательно, неравенство (12) эквивалентно на множестве E неравенству¹

$$\frac{(x+8) - (7-x)}{(7-x) - (2x+1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{4x^2+5x-6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{4(x+2)(x-\frac{3}{4})} \leq 0,$$

которое легко решается методом интервалов:

$$x < -2, \quad -\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}. \quad (13)$$

Пересекая множество (13) с множеством E , получаем ответ.

ОТВЕТ: $[-8; -2) \cup [-\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$.

Задачи

Во всех задачах требуется решить уравнение, систему уравнений или неравенство.

1. (МГУ, биологич. ф-т, 2004) $\sqrt{x+2} = |x-1|$.

$$\frac{c}{\varepsilon^{\lambda} \mp \varepsilon}$$

2. (МГУ, химический ф-т, 2007) $(x^2 - 7|x| + 6)\sqrt{4x+23} = 0$.

$$9 \cdot 1 \mp \frac{v}{\varepsilon^2} -$$

3. (МГУ, географич. ф-т, 1996) $\sqrt{2-x^2} = |x| - 1$.

$$\frac{c}{\varepsilon^{\lambda} + 1} \mp$$

¹Другие примеры использования подобной процедуры смотрите в статье «Метод рационализации».

4. (МГУ, географич. ф-т, 1999)

$$\sqrt{|x^2 + 14x + 47|} - 1 = |x + 7| - 1.$$

$[-9; -8] \cup [-6; -5]$

5. (МГУ, физический ф-т, 2002) $4 + \sqrt{x + 9} = |x + 5|.$

$[-9; -8] \cup [-6; -5]$

6. (МГУ, мехмат, 1994) $3\sqrt{x + 4} = 5 - 2|x + 2|.$

$[-\frac{7}{2}; -3] \cup [-\frac{7}{4}; -\frac{5}{4}]$

7. (МФТИ, 1997) $|3\sqrt{x} + 2 - x| + |x - 3\sqrt{x} + 3| = 9.$

$[9; 10]$

8. (МФТИ, 2007) $\sqrt{25 + |16x^2 - 25|} = 4 + 4|x + 1|.$

$\{\frac{7}{4}\} \cap [\frac{7}{4}; +\infty)$

9. (МГУ, экономич. ф-т, 1996)

$$\begin{cases} |-x| - \sqrt[3]{y + 3} = 1, \\ (-x\sqrt{-x})^2 - y = 10. \end{cases}$$

$[-2; -1]$

10. (МГУ, физический ф-т, 2003)

$$\begin{cases} \sqrt{x - y} = 9 - |x + 2y|, \\ x(x + 4y - 2) + y(4y + 2) = 41. \end{cases}$$

$(\frac{8}{11}; \frac{8}{11}) \cup (1; 9)$

11. (МГУ, физический ф-т, 2005)

$$\begin{cases} x + 4\sqrt{x - y} = y + 12, \\ |2(x + 1) + y| + 2|2x + y - 1| = 3. \end{cases}$$

$(\frac{8}{7}; \frac{8}{5})$

12. («Физтех», 2016, 9–10)

$$8|x - \sqrt{x} + 2| + 2x\sqrt{x} < x^2 + x + 28.$$

$[0; +\infty) \cup (9; +\infty)$

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11)

$$\sqrt{9-x} \cdot |x^2 - 1| \leq \sqrt{9-x} \cdot |x^2 - 10x + 13|.$$

$$\{6\} \cap [3; 7] \cap \left[\frac{9}{2}; \infty\right)$$

14. (МГУ, химический ф-т, 2006) $\sqrt{1-|x|} \geq x - 2$.

$$[1; 1-]$$

15. (МГУ, геологич. ф-т, 1997)

$$\sqrt{|x+1| - 1} > \sqrt{|x+1| - 1997}.$$

$$(\infty+; 9661] \cap [8661-; \infty-)$$

16. (МГУ, ВШБ, 2003)

$$\left| \sqrt{x+4} - 2 \right| > \frac{6}{\sqrt{x+4} - 3}.$$

$$(\infty+; 21) \cap (9; 7-)$$

17. (МГУ, физический ф-т, 2003)

$$\sqrt{12x^2 + 42x + 1} + |2x^2 + 7x| \geq 9.$$

$$(\infty+; \frac{9}{4}] \cap [7-; \infty-)$$

18. (МГУ, мехмат, 1998)

$$3\sqrt{|x+1| - 3} \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3}.$$

$$\left[\frac{2}{19\sqrt{11}}; 3 \right]$$

19. (МГУ, экономич. ф-т, 1993) $3\sqrt{x+2} \leq 6 - |x-2|$.

$$\{2\} \cap [1-; 7-]$$

20. (МГУ, геологич. ф-т, 2001) $|x-6| + \sqrt{3x+1} \leq 5$.

$$\left[\frac{2}{9\sqrt{145}}; 5 \right]$$

21. (МГУ, ф-т психологии, 2003) $|3x+1| + \sqrt{3x+4} \leq 3$.

$$[0; 1-] \cap \left\{ \frac{8}{9} \right\}$$

22. (МГУ, биологич. ф-т, 1997) $\sqrt{|1-8x| - 2} \leq x+1$.

$$\left(\infty+; \frac{9}{8} + \varepsilon \right] \cap \left[\frac{9}{8} - \varepsilon; \frac{8}{8} \right] \cap \left[\frac{8}{1} - \varepsilon; \frac{8}{8} + \varepsilon - \right]$$

23. (МГУ, физический ф-т, 2000) $\sqrt{x^2 + |x - 4| - 18} > x - 4$.

$$\left(\infty + ; \frac{6}{8\epsilon}\right) \cap \left[\frac{\tau}{2\epsilon\wedge - 1}; \infty -\right)$$

24. (МГУ, физический ф-т, 1997) $\sqrt{x^2 + x + 4} \leq 2x + |3x - 2|$.

$$\left(\infty + ; \frac{8}{2}\right] \cap [0; \infty -)$$

25. (МГУ, географич. ф-т, 2003)

$$2\sqrt{9 - x^2} < x + 3(\sqrt{2} + 1) - \left|x + 3(\sqrt{2} - 1)\right|.$$

$$[\epsilon; 0) \cap \left(0; \frac{\tau\wedge}{\epsilon} -\right) \cap \left(\frac{\tau\wedge}{\epsilon} - ; \epsilon -\right)$$

26. (МГУ, ВМК, 1998)

$$\left|\sqrt{x - 4} - 3\right| > \left|\sqrt{9 - x} - 2\right| + 1.$$

$$\left(\frac{\tau}{\epsilon 1}; \tau\right)$$

27. (МГУ, ИСАА, 1999)

$$\frac{\sqrt{x^2 - 3} - 3}{|x + 2| - 5} \geq 1.$$

$$\left(\epsilon; \epsilon\wedge\right) \cap (2 - ; \infty -)$$

28. (МГУ, ВМК, 2004)

$$\frac{x^2 - 4}{\sqrt{15 + 2x - x^2}} \geq |x| - 2.$$

$$(\epsilon; \tau) \cap \left[\frac{\tau}{1 - \epsilon\tau\wedge}; \frac{\tau}{1\epsilon\wedge - \epsilon}\right] \cap [\tau - ; \epsilon -)$$

29. (МГУ, мех.мат, 1996)

$$\frac{x^3 - 8 + 6x(2 - x)}{|3 - 4x|} \leq \sqrt{4x - 3}.$$

$$[2; \frac{\tau}{\epsilon})$$

30. (МФТИ, 2000)

$$\frac{\sqrt{-x^2 + 7x - 6}}{|x^2 - 6x + 5| - |x^2 - 2x - 3|} \leq 0.$$

$$\left[9; \epsilon\wedge + \tau\right) \cap (\tau; 1]$$

31. (МФТИ, 2005)

$$\frac{|x^2 - 5x + 6| + |9 - 2x| - 5}{\sqrt{19x^2 - 4x^3 - 4x + 19}} \leq 0.$$

$$\left[\frac{\tau}{1\tau\wedge + \epsilon}; \tau\right]$$

32. (МФТИ, 2002)

$$\sqrt{\frac{500 + 30x - 2x^2}{2x + 5}} > 10 - |x|.$$

$$\left[\frac{25}{2}; \frac{7}{2} \right) \cap \left(0; \frac{7}{2} - \right) \cap (0; \infty)$$

33. («Физтех», 2013)

$$\frac{1}{\sqrt{|x-3|-1}} \leq \frac{1}{6-x}.$$

$$(9; 5]$$

34. («Физтех», 2017, 10)

$$\sqrt{\frac{|x|-12}{2-x}} > x.$$

$$(-\infty; 2) \cap [1; \infty)$$

35. («Физтех», 2017, 10)

$$\sqrt{\sqrt{x+1}-2} + \sqrt{x+82-18\sqrt{x+1}} > 5.$$

$$[3; 35] \cap (\infty; \infty)$$

36. (МФТИ, 2003)

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+4x-5}-4} < \frac{1}{2|x+6|-5}.$$

$$(8; 1] \cap \left(\frac{3}{22} \sqrt{20+22} \sqrt{2}; 2 - \right) \cap \left(\frac{7}{17} \sqrt{9-8} \sqrt{9-8} \right)$$

37. (МГУ, ВМК, 1990)

$$\sqrt{9x^2-48x-21} + \sqrt{9x^2-51x-15} \leq |3x-6|.$$

$$\left[\frac{6}{99} \sqrt{27+4\sqrt{66}}; \frac{9}{17+4\sqrt{349}} \right] \cup \left[\frac{3}{25} \sqrt{8-4\sqrt{66}}; \frac{6}{8-\sqrt{66}} \right]$$

38. («Покори Воробьёвы горы!», 2011)

$$\sqrt{x-x^2+2} + x^2 > 4-5|x-2|.$$

$$[-1; 2]$$

39. («Ломоносов», 2005)

$$x \left(3x + 2 - 2\sqrt{3-2x-x^2} \right) \geq 3|x|$$

$$\left[1; \frac{81}{11} \right] \cap \{0\} \cap \left[\frac{81}{61-3\sqrt{8}}; 8 \right]$$

40. («Ломоносов», 2007)

$$\frac{\sqrt{8-x} - |2x-1|}{\sqrt{x+7} - |2x-1|} \leq 1.$$

$$\left(7; \frac{9}{4}\right] \cap \left(\frac{1}{8}; 2\right]$$

41. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) При каких значения параметра a неравенство

$$\frac{1}{3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{4-x}} + \left| \frac{1}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{4-x}} \right| + a \leq 0$$

имеет единственное решение? Найдите это решение.

$$\frac{27}{16} = x, \frac{9}{8} = a$$