

Комбинаторика—7

Данный листок является непосредственным продолжением листков «Комбинаторика. Перебор вариантов» и «Комбинаторика. Правило произведения». Он состоит из задач, предлагавшихся на различных олимпиадах в 7 классе.

1. (Всеросс., 2014, ШЭ, 7–9) Назовём число зеркальным, если слева направо оно «читается» так же, как справа налево. Например, число 12321 — зеркальное. Сколько существует пятизначных зеркальных чисел, которые делятся на 5?

001

2. (Всеросс., 2018, ШЭ, 7.5) Определите, в каком количестве точек пересекаются 10 прямых, если среди них есть только две параллельные и ровно три из этих прямых пересекаются в одной точке.

42

3. (Математический праздник, 1997, 7.1) Каких прямоугольников с целыми сторонами больше: с периметром 1996 или с периметром 1998? (Прямоугольники $a \times b$ и $b \times a$ считаются одинаковыми.)

Поряду

4. (Математический праздник, 1996, 7.4) Сколькими способами можно прочесть в таблице слово

- а) КРОНА,
б) КОРЕНЬ,

начиная с буквы К и двигаясь вправо или вниз?

К	Р	О	Н	А	К
Р	О	Н	А	К	О
О	Н	А	К	О	Р
Н	А	К	О	Р	Е
А	К	О	Р	Е	Н
К	О	Р	Е	Н	Ь

а) 16; б) 32

5. («Ломоносов», 2017, 7–8.5, 9.3) Сколько диагоналей в правильном 32-угольнике не параллельны ни одной из сторон этого 32-угольника?

240

6. (Математический праздник, 1996, 7.5) Футбольный мяч шит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутков белого цвета?

20

7. (Математический праздник, 1990, 6–7) Среди математиков каждый седьмой — философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше — философов или математиков?

Философов (в предположении, что философов 9 и математиков 7)

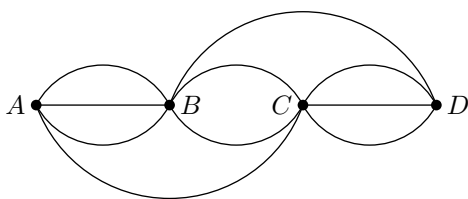
8. («Физтех», 2014, 7–8) На данный момент в классе 20 учеников, получивших с начала учебного года хотя бы одну двойку, 17 учеников, получивших не менее двух двоек, 8 учеников, получивших не менее трёх двоек, три ученика, получивших не менее четырёх двоек, один ученик, получивший пять двоек. Больше пяти двоек нет ни у кого. Сколько всего двоек в журнале?

67

9. («Ломоносов», 2015, 7) Таблицу размера 3×3 надо заполнить числами 2014, 2015 и 2016 так, чтобы сумма чисел в каждой строке была одинаковой. Сколькими различными способами можно это сделать?

138

10. («Ломоносов», 2012, 7) Города A , B , C и D соединены дорогами так, как показано на рисунке.



Сколькими способами можно проделать путь из города A в город D , побывав в каждом городе ровно по одному разу?

20

11. («Ломоносов», 2013, 7) Сколькими различными способами шахматный король может пройти с поля $e1$ на поле $h5$, если ему разрешается ходить только на одну клетку вправо, вверх или по диагонали вправо вверх?

121

12. («Физтех», 2014, 7–8) Сколько различных натуральных делителей у числа 15552?

42

13. («Ломоносов», 2013, 7) а) Сколько натуральных делителей имеет число $N = 1 \underbrace{00 \dots 0}_{99}$?

б) Найдите количество натуральных делителей числа N , не являющихся точными квадратами (т. е. квадратами натуральных чисел).

а) 10000; б) 7500

14. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 7–9) Найдите количество натуральных чисел, которые делятся на 2012 и имеют, не считая единицы и самого этого числа, ровно 2199 различных делителей.

2

15. («Высшая проба», 2014, 7–8) Сколько среди целых чисел от 100 до 10000 таких, в записи которых встречаются ровно три одинаковых цифры?

333

16. («Физтех», 2014, 7–9) Сколько существует делящихся на 9 одиннадцатизначных натуральных чисел, в записи которых участвуют только цифры 0 и 8?

45

17. («Высшая проба», 2014, 7–8) Трамвайный билет состоит из шести цифр от 0 до 9. Сколько билетов содержат ровно 5 одинаковых цифр?

549

18. («Физтех», 2014, 7–8) Сколько существует способов составить комиссию из семи человек, выбирая её членов из восьми супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?

1024

19. («Физтех», 2014, 7–8) Лёша принес в класс 36 орехов и решил разделить их между собой, Максом и Борей. Сколько способов существует это сделать, если у каждого в итоге должен оказаться хотя бы один орех?

595

20. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 7–8) Мария Ивановна — строгая учительница по алгебре. Она ставит в журнал только двойки, тройки и четвёрки, причём никогда не ставит одному ученику две двойки подряд. Известно, что она поставила Вовочке 6 оценок за четверть. Сколькими различными способами она могла это сделать?

448

21. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–8) Найдите количество 10-значных чисел, сумма цифр которых не превосходит 87.

8999999934

22. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–9) Сколько существует пятизначных чисел вида $\overline{ab16c}$, кратных 16? (a, b, c — произвольные цифры, не обязательно разные.)

90

23. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 7–9) Уходя на работу, мама поручила Мише, Пете и Васе:
а) подмести пол в прихожей; б) помыть посуду; в) купить хлеба; г) заплатить за электричество; д) вынести мусор; е) пропылесосить ковёр в гостиной. Сколькими различными способами они могут распределить задания так, чтобы каждое задание делал кто-то один из ребят и при условии, чтобы каждый что-нибудь делал?

540

24. (Московская устная олимпиада, 2015, 7.7) У Пети есть 12 одинаковых разноцветных вагончиков (некоторые, возможно, одного цвета, но неизвестно, сколько вагончиков какого цвета). Петя считает, что различных 12-вагонных поездов он сможет составить больше, чем 11-вагонных. Не ошибается ли Петя? (Поезда считаются одинаковыми, если в них на одних и тех же местах находятся вагончики одного и того же цвета.)

25. («Ломоносов», 2018, 7–9.7) В «Драконьем покере» в колоде четыре масти. Туз приносит 1 очко, валет — 2 очка, двойка — 2^2 , тройка — 2^3 , ..., десятка — $2^{10} = 1024$ очка. Короли и дамы отсутствуют. Можно выбирать из колоды любое количество карт. Сколькими способами можно набрать 2018 очков?

1373734330