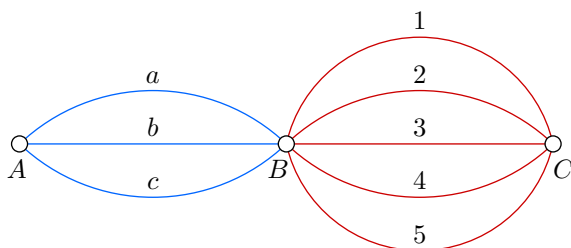


Комбинаторика. Правило произведения

При решении комбинаторных задач часто приходится умножать число способов выбора одного объекта на число способов выбора другого объекта. В качестве примера давайте рассмотрим задачи 19 и 20 из листка «Комбинаторика. Перебор вариантов».

ЗАДАЧА 1. В некотором царстве три города: A , B и C . Из A в B ведут три дороги, из B в C — пять дорог. Сколько различных путей ведут из A в C ? Прямому пути между A и C нет.

РЕШЕНИЕ. Закодируем дороги буквами и цифрами. Именно, дороги из A в B назовём a , b , c ; дороги из B в C назовём 1, 2, 3, 4, 5.



Тогда любой маршрут из A в C однозначно кодируется парой из буквы и цифры. Например, маршрут $b4$ означает, что из A и B мы пошли по дороге b , а из B в C — по дороге 4. Выпишем все такие пары в виде таблицы:

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$
$b1$	$b2$	$b3$	$b4$	$b5$
$c1$	$c2$	$c3$	$c4$	$c5$

Всего получилось $3 \cdot 5 = 15$ маршрутов. Как видим, число маршрутов равно *произведению* числа дорог из A в B на число дорог из B в C .

ЗАДАЧА 2. У Ани четыре разных платья и три разных пары туфель. Собираясь на вечеринку, она думает, что бы ей надеть. Сколько всего у Ани вариантов?

РЕШЕНИЕ. Предположим, что платье Аня уже выбрала. К этому платью она может надеть любую из трёх пар туфель. Таким образом, существует 3 набора «платье-туфли», содержащих фиксированное платье. Поскольку платьев имеется 4, то у Ани возникает $4 \cdot 3 = 12$ вариантов выбора наряда на вечеринку.

ЗАДАЧА 3. В магазине есть 7 видов пиджаков, 5 видов брюк и 4 вида галстуков. Сколькими способами можно купить комплект из пиджака, брюк и галстука?

РЕШЕНИЕ. Пусть пара «пиджак-брюки» уже выбрана (это можно сделать $7 \cdot 5$ способами). К этой паре можно купить галстук 4 способами. Следовательно, для покупки пиджака, брюк и галстука имеется $7 \cdot 5 \cdot 4 = 140$ способов.

В некоторых задачах выбор не является независимым: выбор, сделанный на данном этапе, ограничивает число возможных вариантов на следующем этапе.

ЗАДАЧА 4. Сколькими способами можно составить трёхцветный флаг из трех горизонтальных полос, если имеется материя 5 различных цветов?

РЕШЕНИЕ. Для верхней полосы флага существуют все 5 способов выбора цвета. Если цвет верхней полосы выбран, то это ограничивает число вариантов выбора цвета средней полосы — их остаётся 4. После выбора цветов верхней и средней полос остаётся лишь 3 способа выбрать цвет нижней полосы. Всего получается $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способов составить флаг.

Задачи первого уровня

1. В буфете продаются 4 вида булочек и 5 видов пирожных. Сколькими способами можно купить булочку и пирожное?

20

2. У Кати есть 6 ручек, 3 карандаша и 4 тетради. Сколькими способами Катя может взять с собой в школу ручку, карандаш и тетрадь?

72

3. Сколько различных пар, состоящих из гласной и согласной букв, можно получить из букв слова *комбинаторика*?

18

4. В языке аборигенов далекого острова имеется 10 прилагательных, 20 существительных и 15 глаголов. *Предложением* называется всякое сочетание либо существительного и глагола, либо прилагательного, существительного и глагола. Сколько всего предложений имеется в этом языке?

300

5. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 и 4?

256

6. Монету подбрасывают пять раз. Сколько различных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

32

7. Сколько существует четырёхзначных чисел, все цифры которых нечётны?

625

8. Сколько существует: а) семизначных чисел; б) чётных трёхзначных чисел?

9 (а) 6 (б) 9

9. В футбольной команде 11 человек. Нужно выбрать капитана и его ассистента. Сколькими способами это можно сделать?

110

10. Король решил выдать замуж трёх своих дочерей. Со всех концов света явились во дворец сто юношей. Сколькими способами дочери короля могут выбрать себе женихов?

90000

11. Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 и 6, используя каждую из цифр ровно по одному разу?

09Э

12. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5, используя каждую из цифр ровно по одному разу?

07Г

13. Сколько анаграмм имеют слова *цифра*, *листок*?

120, 720

14. В некоторой школе, в некотором классе в понедельник семь уроков: математика, география, русский, литература, история, английский и физкультура. Сколько вариантов расписания в этом классе можно составить на понедельник?

5040

Задачи второго уровня

Факториал натурального числа n (обозначается $n!$ и читается *эн-факториал*) — это произведение всех натуральных чисел от 1 до n :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. При больших n в задачах можно не вычислять $n!$, так и оставляя ответ в виде факториала.

15. Сколько анаграмм имеет слово *художник*?

18

16. В тридевятом королевстве 39 городов. Король хочет объехать их все. Сколько у короля вариантов выбора маршрута?

16Э

17. *Перестановкой* нескольких различных предметов называется любой способ выложить эти предметы в ряд. Сколько существует перестановок: а) 4; б) n различных предметов?

1! 2! 3! 4! 5! 6! 7! 8! 9! 10!

18. Найдите значение выражения:

$$\text{а) } \frac{9!}{8!}; \quad \text{б) } \frac{2013!}{2014!}; \quad \text{в) } \frac{100!}{98!}; \quad \text{г) } \frac{11!}{4! \cdot 7!}.$$

1! 2! 3! 4! 5! 6! 7! 8! 9! 10! 11! 12! 13! 14! 15! 16! 17! 18! 19! 20!

19. На балу собрались 10 дам и 10 кавалеров. Сколькими способами они могут разбиться на пары?

10!

20. *Началом* шахматной партии назовем первый ход белых и ответный ход черных. Сколько существует начал шахматной партии?

400

21. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и чёрную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

313E

22. Сколько существует пятизначных чисел, у которых на нечётных местах стоят чётные цифры?

10001

23. Сколько существует пятизначных чисел, среди цифр которых нет одинаковых?

2722Z

24. Сколькими способами из колоды 36 карт можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?

72576

25. У двух начинающих коллекционеров по 20 марок и по 10 значков. *Честным* называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок. Сколько всего существует вариантов честного обмена?

500

26. В процессе эволюции племени Ни-Бум-Бум (листок «Комбинаторика. Перебор вариантов», задача 34) в его алфавите появилась четвёртая буква — Г. Словом теперь является любая последовательность, состоящая не более чем из четырёх букв. Сколько слов стало в языке этого племени?

34E

27. Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую чётность?

2812Z

28. На полке стоят 4 книги. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько книг (стопка может состоять и из одной книги)?

49

29. На трёх книжных полках стоят соответственно 10, 20 и 30 книг. Все эти книги разные. Сколькими способами можно выбрать из них пару книг так, чтобы книги в паре были с разных полок?

1100

30. Пусть p и q — различные простые числа. Сколько делителей у числа: а) pq ; б) p^2q ; в) p^2q^2 ; г) p^4q^5 ; д) p^mq^n ?

а) 4; б) 6; в) 9; г) 30; д) $(n+1)(m+1)$

Олимпиадные задачи

31. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.2, 7–8.1) Сколько натуральных чисел от 1 до 2017 имеют ровно три различных натуральных делителя?

14

32. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.2) Сколько трёхзначных натуральных чисел имеют чётное число различных натуральных делителей?

878

33. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–8.6, 9.5) Сколькими способами можно разложить число 10000 на три натуральных множителя, ни один из которых не делится на 10? Считаем, что разложения, отличающиеся только порядком сомножителей, не различаются.

9

34. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.6) Сколькими способами можно разложить число 1024 на три натуральных множителя так, чтобы первый множитель был кратен второму, а второй — третьему?

14

35. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.5, 7–8.4, 9.3) Вася придумывает 4-значный пароль для кодового замка. Он не любит цифру 2, поэтому не использует её. Кроме того он не любит, когда две одинаковые цифры стоят рядом. А ещё он хочет, чтобы первая цифра совпадала с последней. Сколько вариантов надо перебрать, чтобы гарантированно угадать Васин пароль?

504

36. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.4, 7–8.3, 9.2) Петя придумывает пароль для своего смартфона. Пароль состоит из 4 десятичных цифр. Петя хочет, чтобы пароль не содержал цифру 7, при этом в пароле должны быть хотя бы две (или более) одинаковые цифры. Сколькими способами Петя может это сделать?

3537

37. (Всеросс., 2016, I этап, 5.2) Произведение $100 \cdot 100$ представили в виде суммы десяток:

$$100 \cdot 100 = 10 + 10 + \dots + 10.$$

Сколько получилось слагаемых? Обязательно объясните свой ответ.

1000

38. (Математический праздник, 1998, 6–7.1) На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? Меридиан — это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель — это окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).

432

39. (*Математический праздник, 1996, 6.3*) Каких пятизначных чисел больше: не делящихся на 5 или тех, у которых ни первая, ни вторая цифра слева — не пятёрка?

Порядок

40. (*«Ломоносов», 2016, 5–8.4*) Сколько чисел, делящихся на 4 и меньших 1000, не содержат ни одной из цифр 6, 7, 8, 9 или 0?

18

41. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.5, 7–8.6, 9.4*) На клетчатой бумаге нарисовали прямоугольный треугольник с катетами, равными 7 клеткам (катеты идут по линиям сетки). Потом обвели все линии сетки, находящиеся внутри треугольника. Какое наибольшее количество треугольников можно найти на этом рисунке?

28

42. (*Московская устная олимпиада, 2009, 6.5*) Мария Ивановна покупает 16 шариков для Последнего звонка. В магазине есть шарики трёх цветов: синего, красного и зелёного. Сколько существует вариантов различных покупок 16 шариков, если Мария Ивановна хочет, чтобы шарики каждого цвета составляли не менее четверти от количества всех шариков?

15

43. (*Московская устная олимпиада, 2009, 6.8*) Отец говорит сыну:

- Сегодня у нас у обоих день рождения, и ты стал ровно в 2 раза моложе меня.
- Да, и это восьмой раз за мою жизнь, когда я моложе тебя в целое число раз.

Сколько лет сыну, если отец не старше 75 лет?

24 или 30