

## Комбинаторика. Перебор вариантов

Сколькими способами можно выбрать три яблока из корзины? Сколько имеется вариантов школьного расписания? Такого рода вопросами занимается **комбинаторика**. В комбинаторных задачах нас обычно интересует, сколько комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из заданного конечного набора объектов.

В простейших случаях мы можем просто выписать все нужные нам комбинации и подсчитать их. Однако выписывание ни в коем случае не должно быть бессистемным! Примеры правильного перебора — выписывание чисел по возрастанию или слов в алфавитном порядке; при таком переборе ни один вариант не ускользнёт от нас и, с другой стороны, будет исключена возможность повторения вариантов.

**ЗАДАЧА 1.** Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3?

**РЕШЕНИЕ.** Выписываем числа в порядке возрастания:

11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.

Всего получилось 9 чисел.

**ЗАДАЧА 2.** К завтрашнему дню нужно сделать математику, русский и географию (в какой последовательности — безразлично.) Сколькими способами можно приготовить на завтра уроки?

**РЕШЕНИЕ.** Закодируем наши предметы буквами: М — математика, Р — русский, Г — география. Тогда, например, МРГ — это вариант, когда мы сначала делаем математику, потом — русский, потом — географию. Выпишем варианты в алфавитном порядке:

ГМР, ГРМ, МГР, МРГ, РГМ, РМГ.

Получилось 6 вариантов. Итак, уроки на завтра можно сделать шестью способами.

### Задачи первого уровня

1. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 6, 7, 8, 9?

91

2. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если цифры в записи числа не могут повторяться?

21

3. Петя и Вася пишут контрольную по математике. Петя может получить тройку или двойку, а Вася — пятёрку, четвёрку или тройку. Сколькими способами может завершиться для них контрольная?

9

4. Президент Анчурии заказывает у дизайнера государственный флаг, состоящий из трёх горизонтальных разноцветных полос — серой, бурой и малиновой. Сколько у президента имеется вариантов выбора флага?

9

5. На прямой отметили четыре различные точки  $A, B, C, D$ . Сколько при этом получилось отрезков?

9

6. На клетчатой бумаге нарисовали квадрат  $4 \times 4$  и внутри него по линиям клеток прочертили горизонтальные и вертикальные отрезки параллельно сторонам. Сколько всего квадратов оказалось нарисовано?

0Э

7. Петя трижды подбрасывает монету. Сколько различных последовательностей орлов и решек он может при этом получить?

8

8. Сколько: а) двузначных; б) трёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2?

81 (9; 9) (а)

9. Алфавит племени Мумбо-Юмбо содержит только две буквы — А и У. Любая последовательность этих букв является словом. Сколько существует в языке этого племени слов: а) из четырёх букв; б) не более, чем из трёх букв?

14 (6; 6) (а)

10. Турист хочет побывать в Риме, Париже, Лондоне и Афинах, но ещё не решил, в какой последовательности. Сколько перед ним различных вариантов выбора маршрута?

24

11. **Анаграмма** — это слово (не обязательно осмысленное), полученное из данного слова перестановкой букв. Например, *бьорд* является анаграммой слова *дробь*. Сколько анаграмм имеют слова *маг*, *дед*, *краб*, *ирис*?

12 (3, 24, 12)

12. Сколькими способами можно выложить в ряд два красных и два синих шарика? Шарика не отличаются ничем, кроме цвета.

6

13. В магазине продаётся белая, черная и зелёная ткань. Нужно купить ткань двух различных цветов. Из какого числа вариантов приходится выбирать?

3

14. В вазе лежат яблоко, груша, персик и абрикос. Маше разрешили выбрать два каких-то фрукта. Сколько у Маши вариантов выбора?

6

15. В турнире участвовали пять шахматистов, причем каждый шахматист сыграл с каждым из остальных по одной партии. Сколько партий было сыграно на турнире?

10

16. Вите хочется купить пять разных книг. Книги стоят одинаково, а денег хватает только на три книги. Сколькими способами Витя может выбрать три книги из пяти?

01

17. Сколькими способами можно купить Саше и Маше по одной порции мороженого, если в продаже есть вафельные стаканчики, фруктовые стаканчики, шоколадные брикеты и эскимо?

91

18. Сколькими способами можно расставить три разных цветка в две вазы?

8

19. В некотором царстве три города:  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Из  $A$  в  $B$  ведут три дороги, из  $B$  в  $C$  — пять дорог. Сколько различных путей ведут из  $A$  в  $C$ ? Прямого пути между  $A$  и  $C$  нет.

15

20. У Ани четыре разных платья и три разных пары туфель. Собираясь на вечеринку, она думает, что бы ей надеть. Сколько всего у Ани вариантов?

12

### Задачи второго уровня

21. Сколько существует чисел, больших, чем 3528, каждое из которых можно получить перестановкой цифр данного числа?

15

22. Сколько существует трёхзначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 4?

20

23. Сколько существует четырёхзначных чисел, сумма цифр которых больше 33?

15

24. На окружности отметили четыре различные точки. Сколько при этом получилось дуг?

12

25. Сколько существует двузначных чисел, у которых первая цифра меньше второй?

45

26. Шесть знакомых обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?

15

27. Семеро шахматистов провели двухкруговой турнир, в котором каждый сыграл с каждым по две партии (одну партию белыми фигурами, одну — чёрными). Сколько партий было сыграно на турнире?

42

**28.** Девять шестиклассников получили по математике, русскому языку и географии четвёрки и пятёрки в четверти. Докажите, что хотя бы у двух из них оценки по этим предметам полностью совпадают.

**29.** Пятнадцать шестиклассников получили по математике, русскому, географии и физкультуре четвёрки и пятёрки в четверти. Можно ли теперь утверждать, что хотя бы у двух из них оценки по этим предметам полностью совпадают?

Нечет

**30.** Двум врачам нужно посетить четырёх больных, причём каждый врач должен побывать у каких-либо двух больных. Сколькими способами врачи могут распределить между собой эти посещения?

9

**31.** Есть две белые, две красные и две розовые гвоздики. Сколькими способами их можно расставить в три вазы так, чтобы в каждой вазе стояли по две гвоздики разного цвета?

9

**32.** Петя и Вася играют в пинг-понг, матч продолжается до трех побед. Сколько существует вариантов протекания матча?

02

**33.** Из Жёлтой страны в Голубую ведут две дороги, из Голубой страны в Розовую — четыре. Из Жёлтой страны в Фиолетовую ведут три дороги, из Фиолетовой страны в Розовую — тоже три. Прямых дорог из Жёлтой страны в Розовую и из Голубой страны в Фиолетовую нет. Сколькими путями можно добраться из Жёлтой страны в Розовую? А из Голубой страны в Фиолетовую?

81 171

**34.** Алфавит племени Ни-Бум-Бум содержит только три буквы — А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более чем из трёх букв. Сколько слов в языке этого племени?

6Э

**35.** *Задача Леонарда Эйлера.* Четверо господ при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно. Сколько существует вариантов, при которых каждый из них получит чужую шляпу?

6

**36.** (Московская устная олимпиада, 2004, 6.3, 7.2) Сколькими способами можно разрезать доску, показанную на рисунке, на прямоугольники из двух клеток так, чтобы в каждой части была закрашенная клетка?

