# Окружность

*Окружность* — это геометрическое место точек плоскости, удалённых от данной точки на данное (ненулевое) расстояние.

На рис. 1 мы видим окружность — геометрическое место точек $M$, удалённых от точки $O$ на фиксированное расстояние $R$.

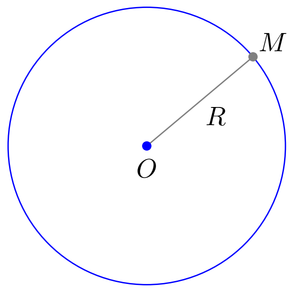


Рис. 1. Окружность с центром $O$ и радиусом $R$

Точка $O$ называется *центром* окружности, а величина $R = OM$ — *радиусом* окружности. Кроме того, радиусом называется сам отрезок $OM$.

*Хорда* — это отрезок, соединяющий две точки окружности. Хорда, проходящая через центр, называется *диаметром*. Также называется диаметром величина, равная удвоеному радиусу окружности.

## Описанная окружность

Окружность, проходящая через все вершины треугольника, называется *описанной* вокруг этого треугольника.

Мы уже знаем (см. листок «Геометрическое место точек»), что *вокруг любого треугольника можно описать единственную окружность, и центр описанной окружности есть точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника* (рис. 2).

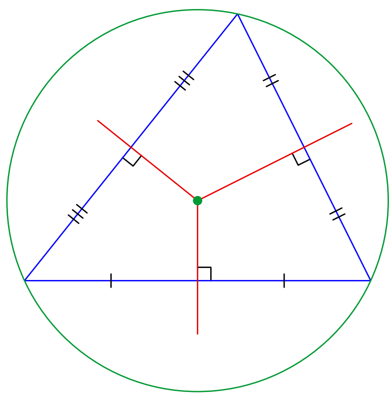

Рис. 2. Описанная окружность

(Напомним, что серединный перпендикуляр к отрезку есть геометрическое место точек, равноудалённых от концов отрезка. Поэтому серединные перпендикуляры к сторонам треугольника обязаны пересечься в одной точке; эта точка, будучи равноудалена от всех трёх вершин треугольника, служит центром описанной окружности.)

## Касательная к окружности

*Касательная к окружности* — это прямая, имеющая с окружностью ровно одну общую точку (которая называется *точкой касания*).

Свойство касательной. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

Признак касательной. Если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в данную точку, то эта прямая является касательной к окружности.

Обе ситуации проиллюстрированы на рис. 3.

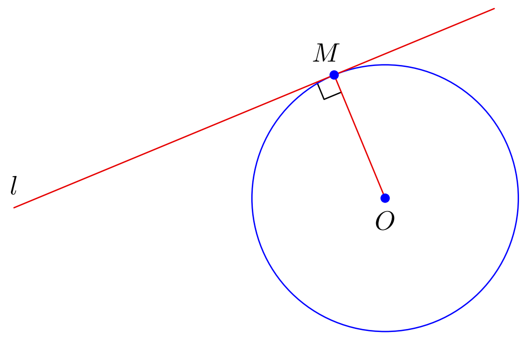


Рис. 3. $l$ — касательная $\Leftrightarrow$ $l \perp OM$

**Задача 1.** Докажите, что отрезки касательных, проведённых из данной точки к окружности, равны друг другу.

*Решение.* Пусть точка $A$ лежит вне окружности. Проведём касательные $AB$ и $AC$ ($B$ и $C$ — точки касания; рис. 4).

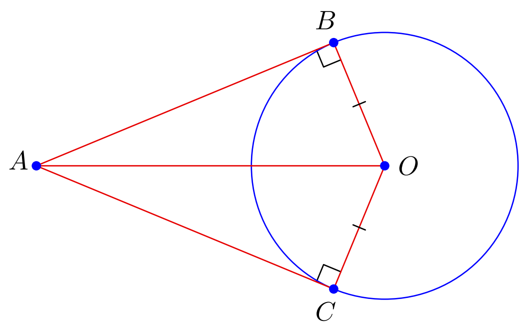


Рис. 4. К задаче 1

Треугольники $AOB$ и $AOC$ — прямоугольные с общей гипотенузой $AO$. Катеты $OB$ и $OC$ являются радиусами окружности и потому равны друг другу. Следовательно, $\Delta AOB = \Delta AOC$ по гипотенузе и катету, и потому $AB = AC$ — что требовалось.

Рассмотренная задача проста, но полученный результат чрезвычайно важен. Равенство отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, очень часто используется при решении задач.

## Вписанная окружность

Окружность называется *вписанной* в треугольник, если она касается всех его сторон.

Из свойства касательной следует, что радиусы вписанной окружности, проведённые в точки касания, перпендикулярны сторонам треугольника. Следовательно, центр вписанной окружности равноудалён от всех трёх сторон треугольника и поэтому совпадает с точкой пересечения биссектрис.

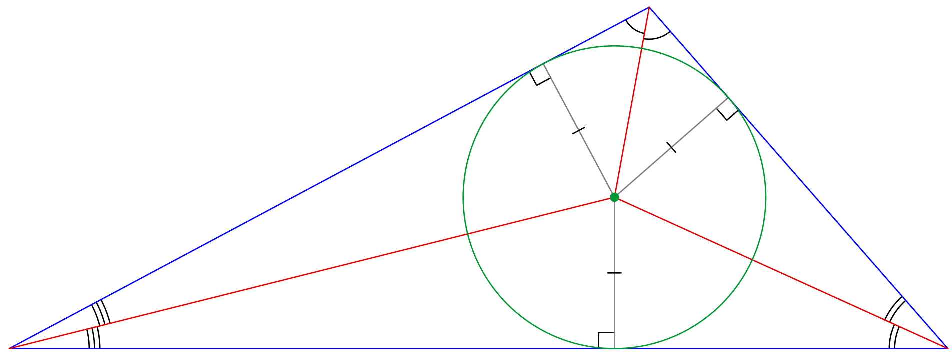

Рис. 5. Вписанная окружность

Таким образом, *в любой треугольник можно вписать единственную окружность, центр которой есть точка пересечения биссектрис треугольника* (рис. 5). Этот факт мы уже отметили в самом конце листка «Геометрическое место точек».

**Задача 2.** Окружность, вписанная в треугольник $ABC$, касается стороны $AB$ в точке $K$. Найдите $AK$, если $AB = 4$, $BC = 3$, $AC = 2$.

*Решение.* Воспользуемся равенством отрезков касательных к окружности, проведённых из одной точки (рис. 6)

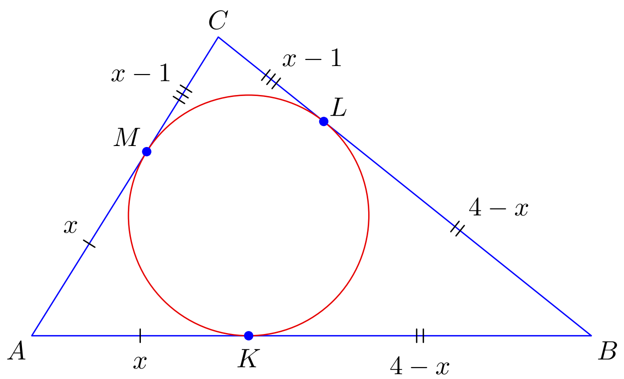


Рис. 6. К задаче 2

Пусть $AK = x$. Тогда и $AM = x$. Отрезок $BK$ равен $4 - x$. Но тогда и $BL = 4 - x$. Далее находим: $CL = 3 - BL = 3 - (4 - x) = x - 1$. Но тогда и $CM = x - 1$. Получаем уравнение:

$$x + (x - 1) = 2,$$

откуда $x = 3/2$.

*Ответ:* $3/2$.