

Биекции

1. (*Московская устная олимпиада, 2015, 7*) У Пети есть 12 одинаковых разноцветных вагончиков (некоторые, возможно, одного цвета, но неизвестно, сколько вагончиков какого цвета). Петя считает, что различных 12-вагонных поездов он сможет составить больше, чем 11-вагонных. Не ошибается ли Петя? (Поезда считаются одинаковыми, если в них на одних и тех же местах находятся вагончики одного и того же цвета.)
2. (*Турнир городов, 2015, 10–11*) Петя подсчитал количество всех возможных m -буквенных слов, в записи которых могут использоваться только четыре буквы T, O, W и N, причем в каждом слове букв T и O поровну. Вася подсчитал количество всех возможных $2m$ -буквенных слов, в записи которых могут использоваться только две буквы T и O, и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше? (Слово — это любая последовательность букв.)
3. (*Турнир городов, 2017, 10–11*) На прямой сидит конечное число лягушек в различных целых точках. За ход ровно одна лягушка прыгает на 1 вправо, причём они по-прежнему должны быть в различных точках. Мы вычислили, сколькими способами лягушки могут сделать n ходов (для некоторого начального расположения лягушек). Докажите, что если бы мы разрешили тем же лягушкам прыгать влево, запретив прыгать вправо, то способов сделать n ходов было бы столько же.
4. (*Всеросс., 2016, финал, 11*) В стране есть $n > 1$ городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиарейсами. При этом между любыми двумя городами существует единственный авиамаршрут (возможно, с пересадками). Мэр каждого города X подсчитал количество таких нумераций всех городов числами от 1 до n , что на любом авиамаршруте, начинающемся в X , номера городов идут в порядке возрастания. Все мэры, кроме одного, заметили, что их результаты подсчётов делятся на 2016. Докажите, что и у оставшегося мэра результат также делится на 2016.