Квадратный трёхчлен

1. (*«Физтех», 2017, 9–11*) Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $3x^2$, его наименьшее значение увеличилось на 9, а когда из него вычли x^2, его наименьшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить x^2?

Увеличится на $\frac{9}{2}$

2. (*«Физтех», 2017, 9–11*) Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает значения 13, 13 и 35 соответственно. Найдите наименьшее возможное значение $f(x)$.

$\frac{41}{4}$

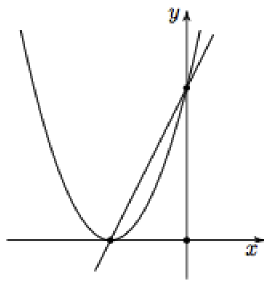
3. (*ММО, 2014, 8.5*) В городе Плоском нет ни одной башни. Для развития туризма жители города собираются построить несколько башен общей высотой в 30 этажей.

Инспектор Высотников, поднимаясь на каждую башню, считает число более низких башен, а потом складывает получившиеся величины. После чего инспектор рекомендует город тем сильнее, чем получившаяся величина больше. Сколько и какой высоты башен надо построить жителям, чтобы получить наилучшую возможную рекомендацию?

4. (*Олимпиада Эйлера, финал, 2017.2*) График $y = x + b\sqrt{x} + c$, где $c > 0$, имеет с осью ординат общую точку C, а ось абсцисс пересекает в точках X_1 и X_2. Обозначим через O начало координат. Докажите, что $\angle CX_1O + \angle CX_2O = 90°$.

5. (*Всеросс., 2015, МЭ, 9.2*) Про коэффициенты a, b, c и d двух квадратных трёхчленов x^2+bx+c и $x^2 + ax + d$ известно, что $0 < a < b < c < d$. Могут ли эти трёхчлены иметь общий корень?

6. (*Всеросс., 2018, МЭ, 9.2*) На координатной плоскости построены графики линейной и квадратичной функций (см. рисунок). Уравнение линейной функции имеет вид $y = cx+2c$ для некоторого числа c. Используя тот же параметр c, запишите уравнение квадратичной функции и объясните свое решение.



$y = 0{,}5c(x + 2)^2$

7. (*ММО, 2014, 9.1*) Все коэффициенты квадратного трёхчлена — нечётные целые числа. Докажите, что у него нет корней вида $1/n$, где n — натуральное число.

8. (*ММО, 2005, 9.1*) Дискриминанты трёх приведённых квадратных трёхчленов равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из них так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся корней.

9. (*ММО, 2007, 9.2*) На параболе $y = x^2$ выбраны четыре точки A, B, C, D так, что прямые AB и CD пересекаются на оси ординат. Найдите абсциссу точки D, если абсциссы точек A, B и C равны a, b и c соответственно.

ab/c

10. (*Всеросс., 2016, РЭ, 9.1, 10.1*) Даны квадратные трёхчлены $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма

$$f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})\,?$$

11. (*Всеросс., 2000, ОЭ, 9.1*) Миша решил уравнение $x^2 + ax + b = 0$ и сообщил Диме набор из четырёх чисел — два корня и два коэффициента этого уравнения (но не сказал, какие именно из них корни, а какие — коэффициенты). Сможет ли Дима узнать, какое уравнение решал Миша, если все числа набора оказались различными?

12. (*Всеросс., 1996, ОЭ, 9.1*) Найдите все пары квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$ такие, что a и b — корни второго трёхчлена, c и d — корни первого.

$x^2 + ax$, $x^2 - ax$ (a — любое); $x^2 + x - 2$, $x^2 + x - 2$

13. (*Всеросс., 1998, ОЭ, 9.1*) Корни двух приведённых квадратных трёхчленов — отрицательные целые числа, причем один из этих корней — общий. Могут ли значения этих трёхчленов в некоторой положительной целой точке равняться 19 и 98?

14. (*Всеросс., 1993, ОЭ, 9.1*) Докажите, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство

$$a^2 + ab + b^2 \geqslant 3(a + b - 1).$$

15. (*Всеросс., 2002, ОЭ, 9.2*) Приведённый квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами в трёх последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере ещё в одной целой точке.

16. (*Всеросс., 2001, ОЭ, 9.2*) Петя и Коля играют в следующую игру: они по очереди изменяют один из коэффициентов a или b квадратного трёхчлена $x^2 + ax + b$: Петя на 1, Коля — на 1 или на 3. Коля выигрывает, если после хода одного из игроков получается трёхчлен, имеющий целые корни. Верно ли, что Коля может выиграть при любых начальных целых коэффициентах a и b независимо от игры Пети?

17. (*Всеросс., 1998, финал, 9.1*) Угол, образованный лучами $y = x$ и $y = 2x$ при $x \geqslant 0$, высекает на параболе $y = x^2 + px + q$ две дуги. Эти дуги спроектированы на ось $0x$. Докажите, что проекция левой дуги на 1 короче проекции правой.

18. (*Всеросс., 2015, финал, 9.1*) Числа a и b таковы, что каждый из двух квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + bx + a$ имеет по два различных корня, а произведение этих трёхчленов имеет ровно три различных корня. Найдите все возможные значения суммы этих трёх корней.

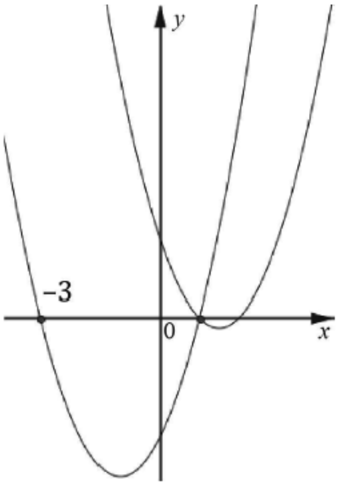
19. (*Всеросс., 2000, финал, 9.1*) Различные числа a, b и c таковы, что уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + bx + c = 0$ имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения $x^2 + x + a = 0$ и $x^2 + cx + b = 0$. Найдите сумму $a + b + c$.

20. (*Всеросс., 1997, финал, 9.5*) Существуют ли такие действительные числа b и c, что каждое из уравнений $x^2 + bx + c = 0$ и $2x^2 + (b + 1)x + c + 1 = 0$ имеет по два целых корня?

21. (*Всеросс., 2017, финал, 9.6*) Верно ли, что для любых трёх различных натуральных чисел a, b и c найдётся квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, принимающий в некоторых целых точках значения a^3, b^3 и c^3?

22. (*Турнир городов, 2017, 8–9*) Докажите, что на графике любого квадратного трёхчлена со старшим коэффициентом 1, имеющего ровно один корень, найдётся такая точка (p, q), что трёхчлен $x^2 + px + q$ также имеет ровно один корень.

23. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 10.4*) На координатной плоскости изображены графики функций $y = x^2 + bx + c$ и $y = x^2 + cx + b$. Найдите значения b и c. В ответе запишите уравнения каждой из функций.



24. (*Всеросс., 2017, МЭ, 10.1*) На листе бумаги построили параболу — график функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$, $b > 0$ и $c < 0$, — а оси координат стёрли. Как они могли располагаться? (*Изобразите любой пример, соответствующий указанным знакам коэффициентов, не изменяя положения самой параболы.*)

25. (*Всеросс., 2018, МЭ, 10.2*) Существуют ли такие попарно различные числа a, b и c, что число a является корнем квадратного трёхчлена $x^2 - 2bx + c^2$, число b является корнем квадратного трёхчлена $x^2 - 2cx + a^2$, а число c является корнем квадратного трёхчлена $x^2 - 2ax + b^2$?

26. (*Всеросс., 2014, МЭ, 10.2*) Корни квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 + ax + b$ равны m_1 и m_2, а корни квадратного трёхчлена $g(x) = x^2 + px + q$ равны k_1 и k_2. Докажите, что $f(k_1) + f(k_2) + g(m_1) + g(m_2) \geqslant 0$.

27. (*Всеросс., 2016, МЭ, 10.4*) Даны три квадратных трёхчлена: $x^2 + b_1x + c_1$, $x^2 + b_2x + c_2$ и $x^2 + \frac{b_1+b_2}{2}x + \frac{c_1+c_2}{2}$. Известно, что их сумма имеет корни (возможно, два совпадающих). Докажите, что хотя бы у двух из этих трёхчленов также есть корни (возможно, два совпадающих).

28. (*ММО, 2017, 10.1*) Квадратный трёхчлен $x^2 + bx + c$ имеет два действительных корня. Каждый из трёх его коэффициентов (включая коэффициент при x^2) увеличили на 1. Могло ли оказаться, что оба корня трёхчлена также увеличились на 1?

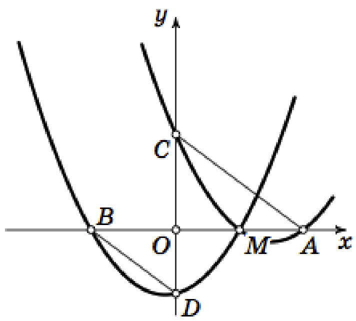
29. (*ММО, 2010, 10.1*) Известно, что сумма любых двух из трёх квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$, $x^2 + ex + f$ не имеет корней. Может ли сумма всех этих трёхчленов иметь корни?

30. (*ММО, 2006, 10.1*) Один из двух приведённых квадратных трёхчленов имеет два корня, меньших тысячи, другой — два корня, больших тысячи. Может ли сумма этих трёхчленов иметь один корень, меньший тысячи, а другой — больший тысячи?

31. (*ММО, 2012, 10.1, 11.1*) Алёша написал на доске 5 целых чисел — коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Боря стёр одно из них. Остались числа 2, 3, 4, -5 в каком-то порядке. Восстановите стёртое число и докажите, что было написано именно оно.

32. (*ММО, 2014, 10.1, 11.1*) Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает в точках $1/a$ и c значения разных знаков. Докажите, что корни трёхчлена $f(x)$ имеют разные знаки.

33. (*ММО, 2013, 10.1*) Даны два квадратных трёхчлена со старшим коэффициентом 1. График одного из них пересекает ось Ox в точках A и M, а ось Oy — в точке C. График другого пересекает ось Ox в точках B и M, а ось Oy — в точке D. (Здесь O — начало координат; точки расположены как на рисунке.) Докажите, что треугольники AOC и BOD подобны.



34. (*Всеросс., 2009, РЭ, 10.1*) Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что многочлен $(f(x))^3 - f(x)$ имеет ровно три вещественных корня. Найдите ординату вершины графика этого трёхчлена.

35. (*Всеросс., 2015, РЭ, 10.7*) Коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

— натуральные числа, сумма которых равна 2000. Паша может изменить любой коэффициент на 1, заплатив 1 рубль. Докажите, что он может получить квадратный трёхчлен, имеющий хотя бы один целый корень, заплатив не более 1050 рублей.

36. (*Всеросс., 2017, финал, 10.1*) На координатной плоскости нарисованы графики двух приведённых квадратных трёхчленов и две непараллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2. Известно, что отрезки, высекаемые графиками на ℓ_1, равны, и отрезки, высекаемые графиками на ℓ_2, также равны. Докажите, что графики трёхчленов совпадают.

37. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 11.4*) Существуют ли такие три действительных числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он будет иметь два различных положительных корня, а если в другом порядке, то два различных отрицательных корня?

38. (*Всеросс., 2014, МЭ, 11.3*) Для квадратного трехчлена $f(x)$ и некоторых действительных чисел l, t и v выполнены равенства: $f(l) = t + v$, $f(t) = l + v$, $f(v) = l + t$. Докажите, что среди чисел l, t и v есть равные.

39. (*ММО, 2013, 11.1*) Два приведённых квадратных трёхчлена имеют общий корень, а дискриминант их суммы равен сумме их дискриминантов. Докажите, что тогда дискриминант хотя бы одного из этих двух трёхчленов равен нулю.

40. (*ММО, 2014, 11.1*) Существует ли такой квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами и a, не кратным 2014, что все числа $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(2014)$ имеют различные остатки при делении на 2014?

41. (*Всеросс., 2009, РЭ, 11.1*) Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что многочлен $(f(x))^5 - f(x)$ имеет ровно три вещественных корня. Найдите ординату вершины графика этого трёхчлена.

42. (*Всеросс., 2015, РЭ, 11.5*) Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два различных корня. Оказалось, что для любых чисел a и b верно неравенство

$$f\left(a^2 + b^2\right) \geqslant f(2ab).$$

Докажите, что хотя бы один из корней этого трёхчлена — отрицательный.

43. (*Всеросс., 2013, РЭ, 11.2*) $P(x)$ и $Q(x)$ — приведённые квадратные трёхчлены, имеющие по два различных корня. Оказалось, что сумма двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в трёхчлен $Q(x)$, равна сумме двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в трёхчлен $P(x)$. Докажите, что дискриминанты трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны.

44. (*Всеросс., 2010, РЭ, 11.7*) Целые числа a, b, c таковы, что значения квадратных трёхчленов bx^2+cx+a и cx^2+ax+b при $x = 1234$ совпадают. Может ли первый трёхчлен при $x = 1$ принимать значение 2009?

45. (*Всеросс., 2008, ОЭ, 11.1*) Даны два квадратных трёхчлена, имеющих корни. Известно, что если в них поменять местами коэффициенты при x^2, то получатся трёхчлены, не имеющие корней. Докажите, что если в исходных трёхчленах поменять местами коэффициенты при x, то получатся трёхчлены, имеющие корни.

46. (*Всеросс., 2007, ОЭ, 11.2*) Квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что

$$f'(x)g'(x) \geqslant |f(x)| + |g(x)|$$

при всех действительных x. Докажите, что произведение $f(x)g(x)$ равно квадрату некоторого трёхчлена.

47. (*Турнир городов, 2017, 10–11*) Две параболы с различными вершинами являются графиками квадратных трёхчленов со старшими коэффициентами p и q. Известно, что вершина каждой из парабол лежит на другой параболе. Чему может быть равно $p + q$?

48. (*Турнир городов, 2017, 10–11*) Графики двух квадратных трёхчленов пересекаются в двух точках. В обеих точках касательные к графикам перпендикулярны. Верно ли, что оси симметрии графиков совпадают?