Площадь. 1

В данной статье мы выведем основные формулы площади параллелограмма, треугольника, ромба и трапеции. За основу берём формулу площади прямоугольника (рис. 1).

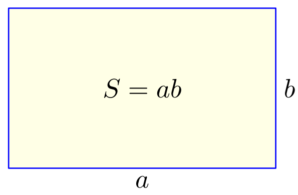

Рис. 1. Площадь прямоугольника

Кроме того, при выводе формул мы будем пользоваться следующими свойствами площади (интуитивно очевидными и принимаемыми в качестве аксиом).

- Площади равных фигур равны.
- Если данная фигура разбита на несколько фигур, то площадь данной фигуры равна сумме площадей фигур разбиения.

Фигуры, имеющие равные площади, называются *равновеликими*. Равные фигуры, таким образом, равновелики; но равновеликие фигуры не обязательно равны.

Площадь параллелограмма

Теорема. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту (проведённую к этому основанию).

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, в котором $AD = BC = a$ и $BH = h$ — высота (рис. 2). Проведём также высоту CK.

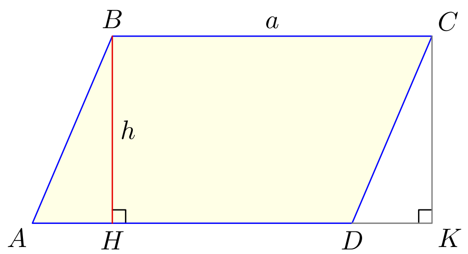

Рис. 2.

Очевидно, что треугольник DCK равен треугольнику ABH. Поэтому площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $HBCK$ (представьте себе, что мы отрезали от параллелограмма треугольник ABH и передвинули его на место треугольника DCK — тем самым мы из параллелограмма сделали прямоугольник).

Но площадь прямоугольника $HBCK$ равна произведению его сторон:

$$S_{HBCK} = BC \cdot BH = ah.$$

Следовательно, площадь параллелограмма:

$$S_{ABCD} = ah.$$

Теорема доказана.

Площадь треугольника

Теорема. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту (проведённую к этому основанию).

Доказательство. В треугольнике ABC проведём высоту h к стороне $AC = a$ (рис. 3). Проведём также $CK \parallel AB$ и $BK \parallel AC$; иными словами, достроим наш треугольник до параллелограмма $ABKC$.

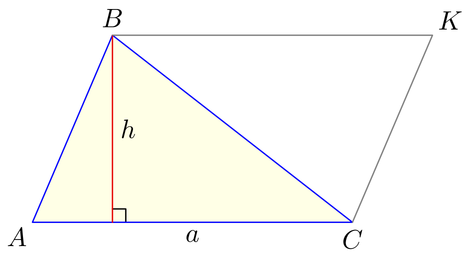

Рис. 3.

Полученный параллелограмм разбивается своей диагональю BC на два равных треугольника, поэтому площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABKC$. Но, как мы уже знаем,

$$S_{ABKC} = ah.$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{ah}{2}.$$

Теорема доказана.

Следствие. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов.

В самом деле, если один из катетов принять за основание, то второй катет будет высотой, опущенной на это основание.

Данный результат легко вытекает и непосредственно из формулы площади прямоугольника (а именно, разрезаем прямоугольник вдоль диагонали).

Площадь ромба

Теорема. Площадь ромба равна половине произведения диагоналей.

Доказательство. Пусть диагонали ромба равны a и b. Ромб разбивается своими диагоналями на четыре равных прямоугольных треугольника (рис. 4).

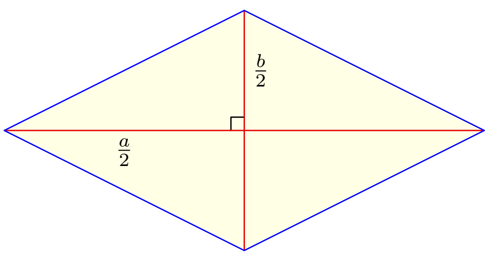

Рис. 4.

Для площади ромба получаем:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{2}.$$

Теорема доказана.

Площадь трапеции

Теорема. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями a и b (рис. 5). Диагональ BD разбивает её на два треугольника.

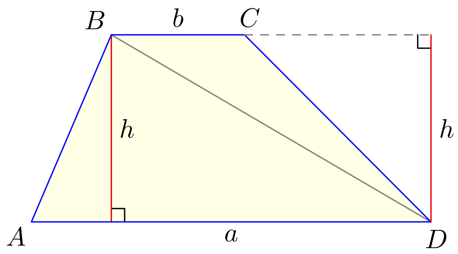

Рис. 5.

Имеем:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}ah, \quad S_{BCD} = \frac{1}{2}bh,$$

откуда

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a+b)h.$$

Теорема доказана.