

## Уравнения с аркфункциями

Для решения уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, нужно чётко знать определения арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса. Если вы их не помните, то повторите ещё раз статью «[Обратные тригонометрические функции. 1](#)».

**Задача 1.** Решить уравнение:  $\arcsin(x^2 - 4x + 4) = \frac{\pi}{2}$ .

*Решение.* Если  $\arcsin a = \pi/2$ , то  $a = 1$ . Следовательно,

$$x^2 - 4x + 4 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 3.$$

*Ответ:* 1, 3.

**Задача 2.** Решить уравнение:  $12 \operatorname{arctg}^2 x - \pi \operatorname{arctg} x - \pi^2 = 0$ .

*Решение.* Делая замену  $t = \operatorname{arctg} x$ , получаем квадратное уравнение относительно  $t$ :

$$12t^2 - \pi t - \pi^2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{\pi}{3}, t_2 = -\frac{\pi}{4}.$$

Теперь обратная замена:

$$\begin{cases} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}, \\ x = -1. \end{cases}$$

*Ответ:*  $\sqrt{3}$ ,  $-1$ .

**Задача 3.** Решить уравнение:  $\arcsin^2 x - 2 \arcsin x - 3 = 0$ .

*Решение.* Замена  $t = \arcsin x$ :

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 3, t_2 = -1.$$

Во первом случае имеем  $\arcsin x = 3$ . Здесь надо быть осторожным: автоматически написать  $x = \sin 3$  нельзя! В данном случае решений нет, поскольку множеством значений арксинуса служит отрезок  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ , а число 3 не принадлежит этому отрезку (ведь  $3 > \frac{\pi}{2}$ ).

Во втором случае имеем  $\arcsin x = -1$ . Число  $-1$  принадлежит множеству значений арксинуса:  $-1 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ , поэтому решением будет  $x = \sin(-1) = -\sin 1$ .

*Ответ:*  $-\sin 1$ .

**Задача 4.** Решить уравнение:  $\arccos^2 x - \arccos x - 2 = 0$ .

*Решение.* Замена  $t = \arccos x$ :

$$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 2, t_2 = -1.$$

В первом случае имеем  $\arccos x = 2$ . Число 2 принадлежит множеству значений арккосинуса:  $2 \in [0; \pi]$ , поэтому  $x = \cos 2$ .

Второй случай:  $\arccos x = -1$ . Решений нет, так как  $-1 \notin [0; \pi]$ .

*Ответ:*  $\cos 2$ .

**Задача 5.** Решить уравнение:  $\arccos x = \operatorname{arctg} x$ .

*Решение.* Множество значений арккосинуса есть отрезок  $[0; \pi]$ . Множество значений арктангенса есть интервал  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ . Поэтому если арккосинус равен арктангенсу, то оба они принимают значения из промежутка  $[0; \frac{\pi}{2})$ . При этом  $x$  может принимать значения из отрезка  $[-1; 1]$ .

Но два числа из промежутка  $[0; \frac{\pi}{2})$  равны тогда и только тогда, когда равны их косинусы. Поэтому наше уравнение равносильно следующему:

$$\cos(\arccos x) = \cos(\operatorname{arctg} x).$$

В левой части имеем:  $\cos(\arccos x) = x$ . В правой части (учитывая, что в промежутке  $[0; \frac{\pi}{2})$  косинус положителен):

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}} = \sqrt{\frac{1}{1 + x^2}}.$$

Получаем уравнение:

$$x = \sqrt{\frac{1}{1 + x^2}},$$

решить которое — несложное самостоятельное упражнение для вас (возводим обе части в квадрат, решаем биквадратное уравнение и учитываем на последнем этапе, что  $x \geq 0$ ).

*Ответ:*  $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ .

**Задача 6.** Решить уравнение:  $\arcsin x = 2 \operatorname{arctg} x$ .

*Решение.* Когда  $x$  пробегает отрезок  $[-1; 1]$ , функция  $\arcsin x$  принимает значения на отрезке  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ , а функция  $\operatorname{arctg} x$  принимает значения на отрезке  $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$ . Поэтому обе части нашего уравнения могут принимать значения на отрезке  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ .

Но равенство чисел из отрезка  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  равносильно равенству их синусов:

$$\sin(\arcsin x) = \sin(2 \operatorname{arctg} x).$$

С левой частью всё ясно:  $\sin(\arcsin x) = x$ . В правой части используем универсальную подстановку:

$$\sin(2 \operatorname{arctg} x) = \frac{2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Приходим к уравнению:

$$x = \frac{2x}{1 + x^2},$$

которое элементарно решается.

*Ответ:*  $0, \pm 1$ .

**Задача 7.** Решить уравнение:  $\sin(3 \arccos x) = \frac{1}{2}$ .

*Решение.* Уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\begin{cases} 3 \arccos x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ 3 \arccos x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arccos x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} = \frac{\pi(1 + 12n)}{18}, \\ \arccos x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} = \frac{\pi(5 + 12n)}{18} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

С учётом неравенства  $0 \leq \arccos x \leq \pi$  из первой серии совокупности годятся лишь  $\frac{\pi}{18}$  и  $\frac{13\pi}{18}$ , а из второй серии годятся лишь  $\frac{5\pi}{18}$  и  $\frac{17\pi}{18}$ :

$$\begin{cases} \arccos x = \frac{\pi}{18}, \\ \arccos x = \frac{13\pi}{18}, \\ \arccos x = \frac{5\pi}{18}, \\ \arccos x = \frac{17\pi}{18}. \end{cases}$$

Соответственно получаем решения нашего уравнения:

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{18}, \quad x_2 = \cos \frac{13\pi}{18}, \quad x_3 = \cos \frac{5\pi}{18}, \quad x_4 = \cos \frac{17\pi}{18}.$$

Ну и заметим напоследок, что  $x_4 = -x_1$  и  $x_2 = -x_3$ .

Ответ:  $\pm \cos \frac{\pi}{18}, \pm \cos \frac{5\pi}{18}$ .

**Задача 8.** Решить уравнение:  $\arcsin^2 x + \arccos^2 x = \frac{5\pi^2}{36}$ .

Решение. Пусть  $t = \arcsin x$ , тогда  $\arccos x = \frac{\pi}{2} - t$ . Имеем:

$$t^2 + \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2 = \frac{5\pi^2}{36} \Leftrightarrow 2t^2 - \pi t + \frac{\pi^2}{9} = 0.$$

Дальше всё очевидно:  $t_1 = \frac{\pi}{3}, t_2 = \frac{\pi}{6}$ , откуда  $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$ .

Ответ:  $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$ .

## Задачи

1. Решите уравнение:

$$\text{а) } \arcsin \left(x^2 + 3x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}; \quad \text{б) } \arccos(x^2 - 4x + 2) = \pi.$$

8 '1 (9 :8- '0 (в

2. Решите уравнение:

$$\text{а) } \arcsin^2 x + \frac{\pi}{2} \arcsin x + \frac{\pi^2}{18} = 0; \quad \text{б) } \arccos^2 x - \pi \arccos x + \frac{2\pi^2}{9} = 0.$$

$\frac{8}{1} \mp (9 : \frac{8}{9} - \frac{8}{1} - (в$

3. Решите уравнение:

$$\begin{aligned} \text{а) } 2 \arcsin^2 x - 7 \arcsin x + 6 &= 0; & \text{б) } \arccos^2 x - \arccos x - 6 &= 0. \\ \text{в) } 2 \operatorname{arctg}^2 x - \operatorname{arctg} x - 1 &= 0; & \text{г) } 5 \operatorname{arctg}^2 x - 16 \operatorname{arctg} x &= 0. \end{aligned}$$

лэн ииниэмэд (т :  $\frac{8}{1}$  81 '1 81 (в :8 cos (9 :  $\frac{8}{9}$  итс (в

4. Решите уравнение:  $\arcsin x = \operatorname{arctg} x$ .

$$\frac{\pi}{1-\sqrt{2}}$$

5. Решите уравнение:  $2 \arcsin x + \arccos(1 - x) = 0$ .

$$0$$

6. Решите уравнение:  $2 \arcsin x = \arccos 3x$ .

$$\frac{\pi}{8-2\sqrt{2}}$$

7. Решите уравнение:  $\cos(4 \operatorname{arctg} x) = \frac{1}{2}$ .

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \mp \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

8. Решите уравнение:

а)  $\arcsin x \cdot \arccos x = -1$ ;

б)  $\arcsin^2 x + \arccos^2 x = \frac{5\pi^2}{4}$ .

$$1 - \left(9 \pm \frac{\pi}{x-9 \pm \sqrt{x^2-9}}\right) \arcsin x - \left(\frac{\pi}{x-9 \pm \sqrt{x^2-9}}\right) \arccos x$$

9. Решите уравнение:  $\operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} = \frac{\pi}{4}$ .

$$\frac{\pi}{2}$$

10. Решите уравнение:  $\operatorname{arctg}(x-1) = 3 \operatorname{arctg}(x+1)$ .

$$\frac{\pi}{2}$$