Окружность Аполлония

Задача 1. (*Окружность Аполлония*) Рассмотрим точки A, B и положительное число $k \neq 1$. Докажите, что геометрическое место точек X, для которых $XA/XB = k$, является окружностью. Исследуйте положение центра этой окружности и величину её радиуса при различных значениях k.

Задача 2. Пусть Ω_c — окружность Аполлония вершин A и B треугольника ABC, для точек X которой выполнено $XA/XB = CA/CB$. Докажите, что Ω_c ортогональна описанной окружности треугольника ABC.

Задача 3. (*Турнир городов, 1996, 8–9*) Через вершину A остроугольного треугольника ABC проведены касательная AK к его описанной окружности, а также биссектрисы AN и AM внутреннего и внешнего углов при вершине A (точки M, K и N лежат на прямой BC). Докажите, что $MK = KN$.

Задача 4. (*IMO, 2010.4*) Let P be a point inside the triangle ABC. The lines AP, BP and CP intersect the circumcircle Γ of triangle ABC again at the points K, L and M respectively. The tangent to Γ at C intersects the line AB at S. Suppose that $SC = SP$. Prove that $MK = ML$.

Задача 5. (*Всеросс., 2012, регион, 11.8*) Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC.$$

Докажите, что

$$\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = 180^\circ.$$

Задача 6. (*Турнир городов, 2005, 10–11*) Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совмещается с лучом OC, а луч OB — с OD. В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F. Доказать, что углы AOE и DOF равны.

Задача 7. (*Всеросс. по геометрии, 2005*) Две окружности с радиусами 1 и 2 имеют общий центр в точке O. Вершина A правильного треугольника ABC лежит на большей окружности, а середина стороны BC — на меньшей. Чему может быть равен угол BOC?

Задача 8. (*Всеросс. по геометрии, 2005, 11.5*) На плоскости дан угол и точка K внутри него. Доказать, что найдётся точка M, обладающая следующим свойством: если произвольная прямая, проходящая через K, пересекает стороны угла в точках A и B, то MK является биссектрисой угла AMB.

Задача 9. (*Всеросс. по геометрии, 2010, 9.7*) В треугольнике ABC AL_a и AM_a — внутренняя и внешняя биссектрисы угла A. Пусть ω_a — окружность, симметричная описанной окружности Ω_a треугольника AL_aM_a относительно середины BC. Окружность ω_b определена аналогично. Докажите, что ω_a и ω_b касаются тогда и только тогда, когда треугольник ABC прямоугольный.

Задача 10. (*Всеросс. по геометрии, 2013, 10.3*) Пусть X — такая точка внутри треугольника ABC, что

$$XA \cdot BC = XB \cdot AC = XC \cdot AB;$$

I_1, I_2, I_3 — центры вписанных окружностей треугольников XBC, XCA и XAB соответственно. Докажите, что прямые AI_1, BI_2 и CI_3 пересекаются в одной точке.