

Окружность Аполлония

ЗАДАЧА 1. (*Окружность Аполлония*) Рассмотрим точки A , B и положительное число $k \neq 1$. Докажите, что геометрическое место точек X , для которых $XA/XB = k$, является окружностью. Исследуйте положение центра этой окружности и величину её радиуса при различных значениях k .

ЗАДАЧА 2. Пусть Ω_c — окружность Аполлония вершин A и B треугольника ABC , для точек X которой выполнено $XA/XB = CA/CB$. Докажите, что Ω_c ортогональна описанной окружности треугольника ABC .

ЗАДАЧА 3. (*Турнир городов, 1996, 8–9*) Через вершину A остроугольного треугольника ABC проведены касательная AK к его описанной окружности, а также биссектрисы AN и AM внутреннего и внешнего углов при вершине A (точки M , K и N лежат на прямой BC). Докажите, что $MK = KN$.

ЗАДАЧА 4. (*ИМО, 2010.4*) Let P be a point inside the triangle ABC . The lines AP , BP and CP intersect the circumcircle Γ of triangle ABC again at the points K , L and M respectively. The tangent to Γ at C intersects the line AB at S . Suppose that $SC = SP$. Prove that $MK = ML$.

ЗАДАЧА 5. (*Всеросс., 2012, регион, 11.8*) Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC.$$

Докажите, что

$$\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = 180^\circ.$$

ЗАДАЧА 6. (*Турнир городов, 2005, 10–11*) Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совмещается с лучом OC , а луч OB — с OD . В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F . Доказать, что углы AOE и DOF равны.

ЗАДАЧА 7. (*Всеросс. по геометрии, 2005*) Две окружности с радиусами 1 и 2 имеют общий центр в точке O . Вершина A правильного треугольника ABC лежит на большей окружности, а середина стороны BC — на меньшей. Чему может быть равен угол BOC ?

ЗАДАЧА 8. (*Всеросс. по геометрии, 2005, 11.5*) На плоскости дан угол и точка K внутри него. Доказать, что найдётся точка M , обладающая следующим свойством: если произвольная прямая, проходящая через K , пересекает стороны угла в точках A и B , то MK является биссектрисой угла AMB .

ЗАДАЧА 9. (*Всеросс. по геометрии, 2010, 9.7*) В треугольнике ABC AL_a и AM_a — внутренняя и внешняя биссектрисы угла A . Пусть ω_a — окружность, симметричная описанной окружности Ω_a треугольника AL_aM_a относительно середины BC . Окружность ω_b определена аналогично. Докажите, что ω_a и ω_b касаются тогда и только тогда, когда треугольник ABC прямоугольный.

ЗАДАЧА 10. (*Всеросс. по геометрии, 2013, 10.3*) Пусть X — такая точка внутри треугольника ABC , что

$$XA \cdot BC = XB \cdot AC = XC \cdot AB;$$

I_1, I_2, I_3 — центры вписанных окружностей треугольников XBC , XCA и XAB соответственно. Докажите, что прямые AI_1 , BI_2 и CI_3 пересекаются в одной точке.