Размещения, перестановки и сочетания

Содержание

Некоторые комбинации объектов встречаются наиболее часто и имеют определённые названия: *размещения*, *перестановки* и *сочетания*. В этом разделе мы научимся подсчитывать количества таких комбинаций.

1 Размещения

В предыдущем листке «Правила суммы и произведения» нам встретились *размещения с повторениями*. Однако повторения возможны не всегда. В некоторых ситуациях бывает, что выбор, сделанный на данном этапе, ограничивает число вариантов выбора на следующем этапе.

Задача. В футбольной команде 11 человек. Сколькими способами можно выбрать: а) капитана и его ассистента; б) капитана, первого ассистента и второго ассистента?

Решение. а) Капитаном можно выбрать любого из 11 футболистов. Ассистентом — любого из 10 оставшихся. Поэтому капитана и ассистента можно выбрать $11 \cdot 10 = 110$ способами.

б) Капитана и первого ассистента мы уже выбрали $11 \cdot 10$ способами. Для выбора второго ассистента остаётся 9 способов. Поэтому капитана, первого ассистента и второго ассистента можно выбрать $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ способами.

В этой задаче мы фактически нашли число упорядоченных пар и упорядоченных троек, которые можно выбрать из 11-элементного множества. Теперь рассмотрим данный вопрос в общем виде.

Определение. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный упорядоченный набор, составленный из k различных элементов данного множества, называется *размещением из n элементов по k элементов* (или просто размещением из n по k).

Число размещений из n элементов по k элементов обозначается A_n^k (читается «а из эн по ка»). Это число упорядоченных наборов из k элементов (или число цепочек длины k), выбранных из n-элементного множества. Найдём, чему равно это число.

Рассуждаем так же, как и в задаче про футболистов. Для выбора первого элемента цепочки имеется n способов, для выбора второго элемента имеется $n-1$ способов, для выбора третьего элемента имеется $n-2$ способов и т. д. Для выбора последнего, k-го элемента цепочки имеется $n-k+1$ способов. Следовательно,

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1). \qquad (1)$$

Данную формулу можно записать в более компактном виде, если правую часть умножить и разделить на $(n-k)!$:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!}\,,$$

то есть

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}\,. \tag{2}$$

(напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, и по определению $0! = 1$).

2 Перестановки

Перестановка есть простой частный случай размещения, однако настолько важный, что заслуживает отдельного рассмотрения.

Задача. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что цифры не должны повторяться?

Решение. Для выбора первой цифры имеется пять способов, для выбора второй — четыре, для выбора третьей — три, для выбора второй — два, и для выбора последней цифры остаётся один способ. Всего чисел получается $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$.

Задача. Имеется n разноцветных шаров. Сколькими способами их можно выложить в ряд?

Решение. Первый шар можно выбрать n способами, второй шар можно выбрать $n-1$ способами и т. д. Для выбора последнего, n-го шара остаётся один способ. Всего получается

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

способов выложить наши n шаров в ряд.

Определение. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольная цепочка длины n, составленная из всех элементов данного множества, называется *перестановкой* этого множества (или перестановкой n элементов).

Иными словами, перестановка n элементов — это размещение из n по n. Число перестановок n-элементного множества обозначается P_n; мы нашли это число в последней задаче (про разноцветные шары):

$$P_n = n!$$

Данная формула легко получается также из формул (1) и (2) при $k = n$.

3 Сочетания

Переходим к рассмотрению *сочетаний*. Вернёмся к нашей футбольной команде, в которой мы выбирали капитана и ассистента.

Задача. В футбольной команде 11 человек. Сколькими способами можно выбрать из них двух игроков для прохождения допинг-контроля?

Решение. На первый взгляд кажется, что ситуация аналогична выбору капитана и ассистента: первого человека выбираем 11 способами, второго — 10 способами, так что всего имеется $11 \cdot 10$ способов. Однако в данном случае это не так.

В самом деле, пара «капитан и ассистент» является *упорядоченной*: выбрать Петю капитаном, а Васю ассистентом — это не то же самое, что выбрать Васю капитаном, а Петю ассистентом. С другой стороны, пара человек, отправленных на допинг-тест, является *неупорядоченной*:

отправить Петю и Васю на тест — это ровно то же самое, что отправить Васю и Петю на тест. Соответственно, в данной задаче нас интересует именно число неупорядоченных пар футболистов, выбираемых из 11 человек.

Давайте представим себе, что неупорядоченная пара {Петя, Вася} как бы склеивается из двух упорядоченных пар (Петя, Вася) и (Вася, Петя). Иными словами, любые две упорядоченные пары, отличающиеся лишь порядком следования объектов, дают одну и ту же неупорядоченную пару. Следовательно, число неупорядоченных пар будет в два раза меньше числа упорядоченных пар и окажется равным

$$\frac{11 \cdot 10}{2} = 55.$$

Таким образом, двух футболистов можно выбрать для допинг-контроля 55 способами.

Задача. Сколькими способами можно выбрать троих футболистов из 11 для прохождения допинг-контроля?

Решение. Произведение $11 \cdot 10 \cdot 9$ (число способов выбора капитана, первого ассистента и второго ассистента) есть число *упорядоченных* троек футболистов. В данном же случае, как и в предыдущей задаче, порядок не важен, поэтому нам нужно найти число *неупорядоченных* троек фуболистов, выбираемых из 11 человек.

В одну неупорядоченную тройку склеиваются те и только те упорядоченные тройки, которые отличаются лишь порядком следования элементов. Число таких троек равно числу перестановок трёх элементов, то есть $3! = 6$. Например, в одну неупорядоченную тройку

$$\{\text{Петя, Вася, Коля}\}$$

склеиваются ровно шесть упорядоченных троек

$$\begin{array}{lll} (\text{Вася, Коля, Петя}), & (\text{Вася, Петя, Коля}), & (\text{Коля, Вася, Петя}), \\ (\text{Коля, Петя, Вася}), & (\text{Петя, Вася, Коля}), & (\text{Петя, Коля, Вася}). \end{array}$$

Следовательно, число неупорядоченных троек в $3!$ раз меньше числа упорядоченных троек. Соответственно, имеется

$$\frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3!} = 165$$

способов выбрать троих человек для допинг-контроля.

В последних двух задачах о футболистах, выбираемых на допинг-контроль, мы нашли число неупорядоченных пар и неупорядоченных троек, которые можно выбрать из 11-элементного множества. Теперь мы можем рассмотреть данный вопрос в общем виде.

Определение. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный неупорядоченный набор, состоящий из k различных элементов данного множества, называется *сочетанием из n элементов по k элементов* (или просто сочетанием из n по k).

Иными словами, сочетание из n элементов по k элементов — это просто k-элементное подмножество n-элементного множества.

Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k (читается «це из эн по ка»). Это число неупорядоченных наборов из k элементов, выбранных из n-элементного множества (то есть число k-элементных подмножеств n-элементного множества). Найдём, чему равно это число.

Число упорядоченных наборов из k элементов (то есть число цепочек длины k) есть число размещений A_n^k. Те и только те цепочки, которые отличаются лишь порядком следования элементов, склеиваются в один неупорядоченный набор. Число таких цепочек равно числу перестановок k элементов, то есть $k!$. Следовательно, искомое число неупорядоченных наборов из k элементов будет в $k!$ раз меньше числа цепочек длины k:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}\,.$$

Согласно формулам (1) или (2) имеем:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,. \tag{3}$$

Теперь, зная, что такое число сочетаний, мы можем сразу сказать, что двух футболистов из одиннадцати для допинг-теста можно выбрать $C_{11}^2 = (11\cdot 10)/2!$ способами; аналогично, трёх футболистов из одиннадцати можно выбрать $C_{11}^3 = (11\cdot 10\cdot 9)/3!$ способами.

Задача. Монету подбрасывают 8 раз. При этом получается некоторая последовательность «орлов» и «решек» (длины 8). Сколько всего существует таких последовательностей, в которых «орёл» выпал ровно три раза?

Решение. Пусть О означает «выпал орёл», а Р — «выпала решка». Тогда в результате восьми подбрасываний мы получим восьмибуквенное слово, состоящее из букв О и Р. Например, слово РОРРООРР означает, что орёл выпал при втором, пятом и шестом подбрасываниях, а в остальных случаях выпала решка.

Теперь ясно, что вопрос ставится так: сколько восьмибуквенных слов можно составить из трёх букв О и пяти букв Р? Заметим, что слово однозначно определяется выбором позиций для трёх букв О (остальные позиции автоматически заполняются буквами Р). Поэтому число наших слов есть число способов выбрать три позиции из восьми, то есть $C_8^3 = (8\cdot 7\cdot 6)/3! = 56$. Это и есть ответ.

Заметим также, что позиции можно было бы выбирать не для букв О, а для букв Р. А именно, слово однозначно определяется выбором позиций для пяти букв Р, что можно сделать $C_8^5 = 56$ способами. Как видите, $C_8^3 = C_8^5$, и это частный случай общего свойства числа сочетаний (см. следующую задачу).

Задача. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Решение. Каждому k-элементному подмножеству A n-элементного множества M однозначно соответствует его дополнение, то есть $(n-k)$-элементное множество, состоящее из все тех элементов, которые не входят в A. Поэтому число k-элементных подмножеств множества M равно числу его $(n-k)$-элементных подмножеств; но первое число есть C_n^k, а второе равно C_n^{n-k}.

(Попросту говоря, выбрать k элементов — это всё равно, что выбрать $n-k$ дополнительных элементов; поэтому число способов выбора первых равно числу способов выбора вторых.)

Данное равенство можно доказать и алгебраически с помощью формулы (3):

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

Задача. Докажите, что $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

Решение. Алгебраическое доказательство с помощью формулы (3) оставляется читателю в качестве самостоятельного упражнения. Приведём комбинаторное доказательство данного равенства.

Рассмотрим множество A, состоящее из $n+1$ элементов. Тогда C_{n+1}^k — это число k-элементных подмножеств множества A.

Выделим в множестве A некоторый элемент и назовём его x. Всякое подмножество множества A либо содержит элемент x, либо не содержит его.

Сколько k-элементных подмножеств множества A не содержит x? Чтобы сформировать такое подмножество, нам нужно из оставшихся n элементов множества A выбрать k элементов. Это можно сделать C_n^k способами. Значит, имеется C_n^k подмножеств множества A, состоящих из k элементов и не содержащих x.

Теперь найдём число k-элементных подмножеств множества A, содержащих элемент x. Чтобы сформировать такое подмножество, надо из оставшихся n элементов множества A выбрать $k-1$ элементов (ведь x уже включён в подмножество). Это можно сделать C_n^{k-1} способами. Значит, число подмножеств множества A, состоящих из k элементов и содержащих элемент x, равно C_n^{k-1}.

Для завершения доказательства остаётся воспользоваться правилом суммы.

Доказанное равенство объясняет, почему числа C_n^k можно расположить по строкам *треугольника Паскаля*. Этот треугольник изображён ниже на рисунке. По боковым сторонам треугольника стоят единицы, числа внутри треугольника расположены в шахматном порядке, и каждое внутреннее число равно сумме двух чисел, стоящих непосредственно над ним.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&&1&&&&&\\
&&&&1&&1&&&&\\
&&&1&&2&&1&&&\\
&&1&&3&&3&&1&&\\
&1&&4&&6&&4&&1&\\
1&&5&&10&&10&&5&&1
\end{array}
$$

Строки треугольника нумеруются сверху начиная с нуля. Числа в строках нумеруются слева также с нуля. Число C_n^k стоит в n-й строке k-м по счёту (например, $6 = C_4^2$).

В следующих задачах нужно не просто находить числа сочетаний, но и одновременно использовать правила произведения и суммы.

Задача. Сколькими способами можно из семи человек выбрать комиссию из трёх человек во главе с председателем?

Решение. Председателя можно выбрать семью способами. Остальных двоих мы выбираем из шести человек $C_6^2 = 15$ способами. Поэтому число способов выбора комиссии равно $7 \cdot 15 = 105$.

Задача. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Сколькими способами можно собрать бригаду из 3 маляров и 4 штукатуров, если имеется 6 маляров и 8 штукатуров?

Решение. Маляров можно выбрать C_6^3 способами. Штукатуров можно выбрать C_8^4 способами. Значит, для формирования бригады имеется $C_6^3 C_8^4 = 20 \cdot 70 = 1400$ способов.

Задача. (*«Высшая проба», 2014, 7–8*) Сколько среди целых чисел от 100 до 10000 таких, в записи которых встречаются ровно три одинаковых цифры?

Решение. Описанные в условии числа будем называть *хорошими*. Трёхзначных хороших чисел, очевидно, девять: 111, 222, …, 999.

Ищем количество четырёхзначных хороших чисел. Ровно двух нулей в записи хорошего числа быть не может. Остаются следующие варианты: три нуля, один нуль, нет нулей.

Хороших четырёхзначных чисел с тремя нулями девять: 1000, 2000, …, 9000.

Предположим, что среди цифр хорошего четырёхзначного числа ровно один нуль. Остальные три (совпадающие) цифры можно выбрать 9 способами. При этом нуль может стоять на втором, третьем или четвёртом месте. Всего получается $9 \cdot 3 = 27$ хороших четырёхзначных чисел с одним нулём.

Предположим, что среди цифр хорошего четырёхзначного числа нуля нет. Тройку совпадающих цифр можно выбрать 9 способами; три позиции для этой тройки можно выбрать $C_4^3 = 4$

способами; четвёртую цифру можно выбрать 8 способами. Всего хороших четырёхзначных чисел без нуля получается $9 \cdot 4 \cdot 8 = 288$.

Искомое количество хороших чисел равно $9 + 9 + 27 + 288 = 333$.

Задача. (*«Физтех», 2011, 9–11*) На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой — 12 точек. Сколько существует треугольников и сколько четырёхугольников с вершинами в этих точках?

Решение. Будем для краткости называть 10 точек на первой прямой *красными*, а 12 точек на второй прямой — *синими*.

У треугольника может быть: 1) одна красная вершина и две синих; 2) одна синяя вершина и две красных. В первом случае мы выбираем красную вершину 10 способами, а синюю — $C_{12}^2 = 12 \cdot 11/2 = 66$ способами. Во втором случае мы выбираем синюю вершину 12 способами, а красную — $C_{10}^2 = 45$ способами. Всего треугольников получается $10 \cdot 66 + 12 \cdot 45 = 1200$.

У четырёхугольника лишь одна возможность: две красные вершины и две синие. Число четырёхугольников получается равным $C_{10}^2 \cdot C_{12}^2 = 45 \cdot 66 = 2970$.

4 Перестановки с повторениями

Идея склеивания упорядоченных наборов (отличающихся лишь порядком следования элементов) в один неупорядоченный набор является весьма плодотворной и даёт не только формулу для числа сочетаний, но и гораздо больше.

Задача. Анаграмма — это слово (не обязательно осмысленное), полученное из данного слова перестановкой букв. Например, *бьорд* является анаграммой слова *дробь*. Сколько всего анаграмм у слова *дробь*? У слова *класс*? У слова *колобок*?

Решение. У слова *дробь* имеется 5! анаграмм — именно столько существует перестановок множества из пяти объектов.

В слове *класс* две буквы одинаковы. Давайте временно считать их различными, приписав им индексы: $\textit{клас}_1\textit{с}_2$. У этого нового слова 5! анаграмм. А теперь во всех анаграммах нового слова сотрём индексы. Каждые две анаграммы слова $\textit{клас}_1\textit{с}_2$, которые отличались лишь перестановкой букв $с_1$ и $с_2$, склеятся в одну анаграмму слова *класс*. Поэтому анаграмм получится $5!/2 = 60$.

Аналогично рассмотрим слово $\textit{к}_1\textit{о}_1\textit{ло}_2\textit{бо}_3\textit{к}_2$. У него 7! анаграмм. После стирания индексов у букв $о_1$, $о_2$, $о_3$ склеятся в одно слово каждые 3! анаграмм, отличающиеся лишь перестановкой этих трёх букв. Затем после стирания индексов у букв $к_1$ и $к_2$ склеятся в одно слово каждые 2! анаграмм, отличающиеся лишь перестановкой этих двух букв. Таким образом, после стирания всех индексов склеятся в одно слово $3! \cdot 2!$ анаграмм, и число анаграмм у слова *колобок* будет равно

$$\frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420.$$

У слов *класс* и *колобок* анаграмм получилось меньше, чем 5! и 7! соответственно, по той причине, что в этих словах присутствуют повторяющиеся буквы. Учитывая повторы и деля на соответствующий коэффициент, мы находим количество так называемых *перестановок с повторениями*.

Идея нахождения числа перестановок с повторениями иногда называется *методом кратного подсчёта*. Суть метода проста: чтобы посчитать нужное количество комбинаций, мы сначала находим количество других комбинаций, превосходящее количество исходных комбинаций в некоторое число раз, а потом делим на это число.

Формула для числа сочетаний немедленно получается с помощью метода кратного подсчёта. В самом деле, число способов выбора k объектов из n объектов равно числу анаграмм

n-буквенного слова

$$\underbrace{aa\dots a}_{k}\underbrace{bb\dots b}_{n-k},$$

состоящего из k букв a и $n-k$ букв b (ведь каждая анаграмма — это определённый выбор k позиций из n для букв a). Из сказанного выше ясно, что у данного слова имеется

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

анаграмм; столько же получается и сочетаний из n по k.

Теперь сформулируем общую задачу о перестановках с повторениями.

Задача. Имеются m различных шаров и n различных ящиков. Сколькими способами можно разложить шары по ящикам так, чтобы m_1 шаров оказались в первом ящике, m_2 шаров — во втором, $\dots$, m_n шаров — в n-м ящике ($m_1+m_2+\dots+m_n=m$)?

Решение. Искомое число способов обозначим $P(m_1, m_2, \dots, m_n)$. Оно равно количеству анаграмм n-буквенного слова

$$\underbrace{a_1a_1\dots a_1}_{m_1}\underbrace{a_2a_2\dots a_2}_{m_2}\dots\underbrace{a_na_n\dots a_n}_{m_n}. \tag{4}$$

В самом деле, выбрать m_1 шаров для первого ящика есть то же самое, что выбрать m_1 позиций для букв a_1; затем, выбрать m_2 шаров для второго ящика есть то же самое, что выбрать m_2 позиций для букв a_2, и т. д.

Все буквы слова (4) можно переставить $m!$ способами. Это число надо разделить на $m_1!$ (перестановок букв a_1, которые ничего не меняют), на $m_2!$ (перестановок букв a_2, которые ничего не меняют), $\dots$, на $m_n!$ (перестановок букв a_n, которые ничего не меняют). Итого получается

$$P(m_1, m_2, \dots, m_n) = \frac{m!}{m_1!m_2!\dots m_n!} = \frac{(m_1+m_2+\dots+m_n)!}{m_1!m_2!\dots m_n!}$$

способов.

Нетрудно видеть, что данная формула обобщает формулу для числа сочетаний. В самом деле, мы просто имеем $C_n^m = P(m, n-m)$.

5 Сочетания с повторениями

Как мы знаем, число способов разложить m различных шаров в n различных ящиков (без каких-либо дополнительных ограничений) есть число размещений с повторениями: $\bar{A}_n^m = n^m$. А сколько получится способов, если шары *одинаковые*?

Задача. Сколькими способами можно разложить пять одинаковых шаров по трём различным ящикам? На число шаров в ящике ограничений нет.

Решение. Представим себе, что ящики стоят вплотную друг к другу. Три таких ящика — это фактически две перегородки между ними. Обозначим шар нулём, а перегородку — единицей. Тогда любому способу раскладывания пяти шаров по трём ящикам однозначно соответствует последовательность из пяти нулей и двух единиц; и наоборот, каждая такая последовательность однозначно определяет некоторый способ раскладывания. Например, 0010010 означает, что в первом ящике лежат два шара, во втором — два шара, в третьем — один шар; последовательность 0000011 соответствует случаю, когда все пять шаров лежат в первом ящике.

Теперь ясно, что способов разложить пять шаров по трём ящикам существует ровно столько же, сколько имеется последовательностей из пяти нулей и двух единиц. А число таких последовательностей равно C_7^2.

Задача. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x + y + z = 5$?

Решение. Если вдуматься, то это — в точности предыдущая задача, только по-другому сформулированная. В самом деле, рассмотрим пять одинаковых шаров и три различных ящика. Тогда числа x, y и z есть просто количества шаров, положенных соответственно в первый, второй и третий ящик, причём любое из этих чисел может равняться нулю. Следовательно, данное уравнение имеет C_7^2 решений.

Задача. В магазине продаётся апельсиновый, виноградный, персиковый и яблочный сок. Нужно купить семь пакетов сока. Сколько различных наборов можно составить?

Решение. Четыре вида сока — это четыре различных ящика, в которые нужно положить семь шаров. Снова обозначаем шары нулём, а перегородки — единицей. Тогда, например, последовательность 0000110100 означает, что куплены четыре пакета апельсинового, один пакет персикового и два пакета яблочного сока (виноградный сок не покупали — второй ящик пуст).

Поэтому число способов покупки семи пакетов сока четырёх видов — это число способов разложить семь одинаковых шаров по четырём ящикам, то есть число последовательностей из семи нулей и трёх единиц. Число таких последовательностей равно C_{10}^3.

В данной задаче мы могли купить *несколько* пакетов сока данного вида (хоть все семь). Поэтому в подобных ситуациях говорят о *сочетаниях с повторениями*. Сформулируем общую задачу о числе сочетаний с повторениями.

Задача. Сколькими способами можно выбрать m пакетов сока, если в продаже имеется n видов сока? Иными словами, сколькими способами можно разложить m одинаковых шаров по n различным ящикам (в ящике может быть любое количество шаров)?

Решение. Рассуждаем, как и выше: имеем m шаров и $n - 1$ перегородок, то есть последовательность из m нулей и $n - 1$ единиц. Всего таких последовательностей будет C_{m+n-1}^m.

Число способов, которыми можно разложить m одинаковых шаров по n различным ящикам, называется *числом сочетаний с повторениями из n по m* и обозначется $\bar{C}_n^m$. Таким образом,

$$\bar{C}_n^m = C_{m+n-1}^m.$$

Теперь немного изменим условие исходной задачи о раскладывании шаров по ящикам.

Задача. Сколькими способами можно разложить пять одинаковых шаров по трём различным ящикам так, чтобы ни один ящик не пустовал?

Решение. Положим вначале по одному шару в каждый ящик — тогда ни один ящик пустым не будет. У нас остались два шара, которые надо разложить по трём ящикам произвольным образом. Число таких раскладываний есть число последовательностей из двух нулей и двух единиц, то есть C_4^2.

Можно рассуждать и по-другому. Положим в ряд пять шаров. Перегородки могут быть только в промежутках между шарами. Таким образом, нам нужно поместить две перегородки в какие-то два из четырёх промежутков, а выбрать две позиции из четырёх можно C_4^2 способами.

Задача. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x + y + z = 5$?

Решение. Это — в точности предыдущая задача, поскольку ни одна из переменных теперь не может равняться нулю. Уравнение имеет $C_4^2 = 6$ решений в натуральных числах. Нетрудно решить задачу и непосредственным перебором (сделайте это).

Задача. Сколькими способами можно разложить m одинаковых шаров по n различным ящикам так, чтобы ни один ящик не пустовал ($m \geqslant n$)?

Решение. Рассуждаем, как и выше. Сначала кладём по одному шару в каждый ящик, а остальные $m - n$ шаров раскладываем произвольным образом. Получается $\bar{C}_n^{m-n} = C_{m-1}^{n-1}$ способов.

Знание сочетаний с повторениями (то есть схемы шаров и перегородок) поможет не «изобретать велосипед» на олимпиаде.

Задача. (*«Физтех», 2011, 9*) 19 депутатов Городского Собрания выбирают Председателя из 5 кандидатов. Каждый голосует ровно за одного из них. После голосования составляется протокол заседания, в котором указывается лишь количество голосов за каждого кандидата (без указания, кто за кого проголосовал). Сколько различных протоколов может получиться?

Решение. Пусть за первого кандидата проголосовало x_1 депутатов, за второго — x_2 депутатов, …, за пятого — x_5 депутатов. Тогда

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 19, \qquad (5)$$

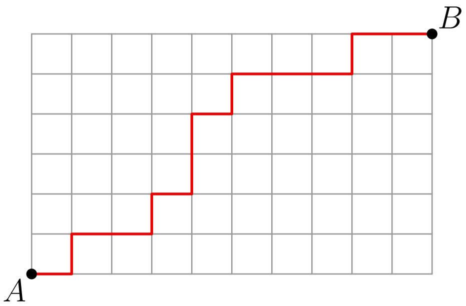
поскольку каждый депутат голосовал лишь за одного кандидата. Теперь ясно, что искомое количество протоколов равно количеству решений уравнения (5) в целых неотрицательных числах. А это количество, в свою очередь, есть число способов разложить 19 одинаковых шаров по пяти различным ящикам, то есть число последовательностей из 19 нулей (шаров) и 4 единиц (перегородок). Таких последовательностей имеется $C_{23}^4 = 8855$.

6 Маршруты

Маршрутом мы будем называть ломаную, у которой вершины имеют целочисленные координаты, а звенья направлены либо вправо, либо вверх.

Задача. Сколько маршрутов ведут из точки $A(0,0)$ в точку $B(10,6)$? Сколько таких маршрутов проходит через точку $M(6,4)$?

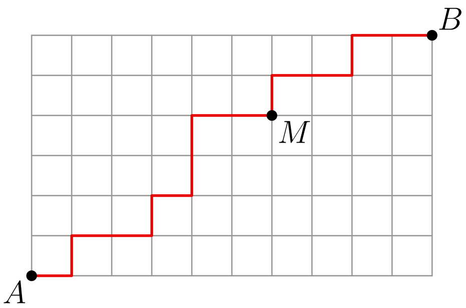
Решение. Возможный маршрут из A в B показан на рисунке.



Каждый такой маршрут состит из 16 звеньев — 10 горизонтальных и 6 вертикальных. Поэтому любой маршрут можно закодировать словом из 16 букв Г и В, в котором будет 10 букв Г и 6 букв В. Так, изображённый выше маршрут обозначается словом ГВГГВГВВГВГГГВГГ.

Следовательно, маршрутов будет столько же, сколько имеется 16-буквенных слов из 10 букв Г и 6 букв В, то есть C_{16}^6.

Ограничимся теперь маршрутами, проходящими через точку $M(6,4)$.



Каждый такой маршрут состоит из двух частей: маршрута из A в M и маршрута из M в B. Рассуждая, как и выше, находим, что маршрутов из A в M будет C_{10}^4, а маршрутов из M в B будет C_6^2. Всего маршрутов из A в B, проходящих через M, будет $C_{10}^4 C_6^2$.

7 Бином Ньютона

Вам известны формулы $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ и $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Выведем общую формулу для $(a+b)^n$.

Задача. (*Бином Ньютона*) Доказать, что

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k.$$

Решение. Начнём со следующей записи, иллюстрирующей основную идею:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb.$$

Точно так же раскроем скобки в произведении

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n},$$

просто записывая получающиеся одночлены как слова длины n, состоящие из букв a и b (можно упорядочить их по алфавиту, как и выше, но это не обязательно). После приведения подобных членов слагаемое $a^{n-k}b^k$ дадут те и только те слова, которые составлены из k букв b и $n-k$ букв a. Таких слов C_n^k; это и будет коэффициент при $a^{n-k}b^k$ в получившейся сумме. Поэтому числа C_n^k называются ещё *биномиальными коэффициентами*.

Задача. (*«Высшая проба», 2014, 10*) Сколько слагаемых получится после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении $(1+x^2)^{100}(1+x^5)^{100}$?

Решение. Бином Ньютона для нашего выражения даёт:

$$\left(1 + C_{100}^1x^2 + C_{100}^2x^4 + \ldots + C_{100}^{99}x^{198} + x^{200}\right)\left(1 + C_{100}^1x^5 + C_{100}^2x^{10} + \ldots + C_{100}^{99}x^{495} + x^{500}\right) = \\ = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k x^{2k} \sum_{m=0}^{100} C_{100}^m x^{5m} = \sum_{k,m=0}^{100} a_{km}x^{2k+5m}, \quad (6)$$

где $a_{km} = C_{100}^k C_{100}^m$ (вид этих коэффициентов на самом деле не важен). Итак, после раскрытия скобок получается сумма одночленов со всевозможными показателями степени вида $2k+5m$, где k и m пробегают целые значения от 0 до 100.

Имеем очевидную оценку: $0 \leqslant 2k+5m \leqslant 700$, и если бы каждое промежуточное значение достигалось, то после приведения подобных членов в сумме оказалось бы 701 слагаемое. Выясним, какие промежуточные значения достигаются на самом деле, а какие запрещены.

Мы расмотрим всевозможные остатки, которые может давать $2k+5m$ при делении на 10. Имеем, соответственно, 10 случаев.

1. Пусть $2k+5m = 10n$. Тогда $k = 5p$, $m = 2q$ (p и q — целые неотрицательные числа), откуда $p+q = n$. Имеем:

$$0 \leqslant 5p \leqslant 100 \;\Rightarrow\; 0 \leqslant p \leqslant 20;$$
$$0 \leqslant 2q \leqslant 100 \;\Rightarrow\; 0 \leqslant q \leqslant 50.$$

   Следовательно, величина $2k+5m = 10(p+q)$ может принимать любые целые значения от 0 до $700 = 10(20+50)$. В этом случае запрещённых промежуточных значений нет.

2. Пусть $2k+5m = 10n+1$. Перебор остатков от деления на 5 и на 2 показывает, что возможен лишь вариант $k = 5p + 3$, $m = 2q - 1$ (и тогда снова $p + q = n$). Имеем:

$$0 \leqslant 5p + 3 \leqslant 100 \;\Rightarrow\; 0 \leqslant p \leqslant 19;$$
$$0 \leqslant 2q - 1 \leqslant 100 \;\Rightarrow\; 1 \leqslant q \leqslant 50.$$

Поэтому величина $2k + 5m = 10(p + q) + 1$ может принимать любые целые значения от 11 до 691. Значение 1 оказывается запрещённым (что очевидно — уравнение $2k + 5m = 1$ не имеет решений в натуральных числах).

Оставшиеся случаи разбираются по той же схеме и описываются менее подробно.

3. $2k + 5m = 10n + 2 \;\Rightarrow\; k = 5p + 1$, $m = 2q$, $p + q = n$. Получаем: $0 \leqslant p \leqslant 19$, $0 \leqslant q \leqslant 50$, откуда $2 \leqslant 10(p + q) + 2 \leqslant 692$. Запрещённых значений нет.

4. $2k + 5m = 10n + 3 \;\Rightarrow\; k = 5p + 4$, $m = 2q - 1$, $p + q = n$. Имеем: $0 \leqslant p \leqslant 19$, $1 \leqslant q \leqslant 50$, откуда $13 \leqslant 10(p + q) + 3 \leqslant 693$. Значение 3 не достигается.

5. $2k + 5m = 10n + 4 \;\Rightarrow\; k = 5p + 2$, $m = 2q$, $p + q = n$. Имеем: $0 \leqslant p \leqslant 19$, $0 \leqslant q \leqslant 50$, откуда $4 \leqslant 10(p + q) + 4 \leqslant 694$. Запрещённых значений нет.

6. $2k + 5m = 10n + 5 \;\Rightarrow\; k = 5p$, $m = 2q + 1$, $p + q = n$. Имеем: $0 \leqslant p \leqslant 20$, $0 \leqslant q \leqslant 49$, откуда $5 \leqslant 10(p + q) + 5 \leqslant 695$. Запрещённых значений нет.

7. $2k + 5m = 10n + 6 \;\Rightarrow\; k = 5p + 3$, $m = 2q$, $p + q = n$. Имеем: $0 \leqslant p \leqslant 19$, $0 \leqslant q \leqslant 50$, откуда $6 \leqslant 10(p + q) + 6 \leqslant 696$. Запрещённых значений нет.

8. $2k + 5m = 10n + 7 \;\Rightarrow\; k = 5p + 1$, $m = 2q + 1$, $p + q = n$. Имеем: $0 \leqslant p \leqslant 19$, $0 \leqslant q \leqslant 49$, откуда $7 \leqslant 10(p + q) + 7 \leqslant 687$. Значение 697 не достигается.

9. $2k + 5m = 10n + 8 \;\Rightarrow\; k = 5p + 4$, $m = 2q$, $p + q = n$. Имеем: $0 \leqslant p \leqslant 19$, $0 \leqslant q \leqslant 50$, откуда $8 \leqslant 10(p + q) + 8 \leqslant 698$. Запрещённых значений нет.

10. $2k + 5m = 10n + 9 \;\Rightarrow\; k = 5p + 2$, $m = 2q + 1$, $p + q = n$. Имеем: $0 \leqslant p \leqslant 19$, $0 \leqslant q \leqslant 49$, откуда $9 \leqslant 10(p + q) + 9 \leqslant 689$. Значение 699 не достигается.

Итак, величина $2k + 5m$ при $0 \leqslant k, m \leqslant 100$ принимает все значения от 0 до 700, кроме 1, 3, 697 и 699. Значит, в сумме (6) окажется $701 - 4 = 697$ слагаемых.

8 Три задачи о функциях

Мы уже видели выше, что задачи с внешне непохожими формулировками могут оказаться в сущности одной и той же задачей. Приведём ещё три примера такого рода.

Напомним, что функцией f из множества A в множество B (обозначается $f\colon A \to B$) называется правило, по которому каждому элементу x множества A сопоставляется единственный элемент $f(x)$ множества B. При этом элемент $f(x)$ называется *образом* элемента x, а сам элемент x называется *прообразом* элемента $f(x)$.

Задача. Найти число всех функций $f\colon \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Решение. Каждую такую функцию можно описать следующим образом. Представим себе m клеток с номерами 1, 2, ..., m. В клетку с номером i впишем число $f(i)$ — образ числа i. Таким образом, любая наша функция f однозначно задаётся полоской из m клеток, заполненных числами от 1 до n. Очевидно, что число таких полосок (а значит, и искомое число функций) равно n^m.

Нетрудно видеть, что данная задача есть по сути задача о разложении m различных шаров в n различных ящиков (без ограничений на число шаров в ящике). Число наших функций — это число размещений с повторениями $\bar{A}_n^m$.

Задача. Пусть $m \leqslant n$. Найти число возрастающих функций $f\colon \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ (удовлетворяющих условию $i < j \Rightarrow f(i) < f(j)$).

Решение. Возрастающая функция полностью задаётся множеством своих значений; то есть, любое m-элементное подмножество множества $\{1, \ldots, n\}$ определяет единственную возрастающую функцию $f\colon \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$. Поэтому таких функций столько же, сколько имеется m-элементных подмножеств у n-элементного множества, то есть число сочетаний C_n^m.

Задача. Найти число неубывающих функций $f\colon \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ (удовлетворяющих условию $i < j \Rightarrow f(i) \leqslant f(j)$).

Решение. Чтобы проще было разобраться в общей ситуации, начнём с частного случая. Именно, найдём число неубывающих функций $f\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3\}$.

Каждая такая функция однозначно кодируется неубывающей последовательностью длины 4, составленной из чисел 1, 2 и 3. Например, последовательность 1123 задаёт функцию f, для которой $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(4) = 3$; аналогично, последовательность 1222 задаёт функцию f, для которой $f(1) = 1$, $f(2) = f(3) = f(4) = 2$.

А каждую такую последовательность можно описать в терминах шаров и ящиков. Представим себе три ящика (это числа 1, 2 и 3, из которых составляются последовательности) и четыре одинаковых шара. Число единиц в последовательности — это число одинаковых шаров в первом ящике; число двоек — это число одинаковых шаров во втором ящике; число троек — это число одинаковых шаров во третьем ящике. Так, последовательность 1123 означает, что в первом ящике лежат два шара, во втором — один и в третьем — один; аналогично, последовательность 1222 означает, что в первом ящике находится один шар, во втором — три шара, а третий ящик пуст.

Следовательно, искомое число функций равно числу способов разложить четыре одинаковых шара по трём ящикам, то есть числу сочетаний с повторениями $\bar{C}_3^4 = C_6^4$.

Теперь, разобравшись в этом примере, нетрудно перейти к общему случаю. Число неубывающих функций $f\colon \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ равно числу неубывающих последовательностей длины m, составленных из чисел 1, 2, ..., n. Возьмём m одинаковых шаров и n различных ящиков. Число единиц в последовательности — это число шаров в первом ящике; число двоек в последовательности — это число шаров во втором ящике, и так далее. Следовательно, количество наших неубывающих последовательностей равно числу способов разложить m одинаковых шаров по n различным ящикам (без ограничений на число шаров в ящике), то есть числу сочетаний с повторениями $\bar{C}_n^m = C_{m+n-1}^m$.

9 Задачи

1. На прямой отметили 10 различных точек. Сколько при этом получилось отрезков?

45

2. На окружности отметили 12 различных точек. Сколько при этом получилось дуг?

132

3. Сколько диагоналей в выпуклом 12-угольнике?

54

4. (*«Ломоносов», 2017, 7–9*) Сколько диагоналей в правильном 32-угольнике не параллельны ни одной из сторон этого 32-угольника?

240

5. На плоскости проведены 10 прямых так, что никакие две прямые не параллельны и никакие три прямые не пересекаются в одной точке.

а) Найдите число точек пересечения этих прямых.

б) Сколько треугольников образовано этими прямыми?

а) 45; б) 120

6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–9*) На клетчатой бумаге нарисовали прямоугольный треугольник с катетами, равными 7 клеткам (катеты идут по линиям сетки). Потом обвели все линии сетки, находящиеся внутри треугольника. Какое наибольшее количество треугольников можно найти на этом рисунке?

28

7. (*«Высшая проба», 2013, 11*) В классе 12 учеников. Их нужно разбить на две группы (первую и вторую), состоящие из чётного числа учеников. Сколькими способами это можно сделать?

2046

8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Сколькими способами тренер может скомплектовать хоккейную команду, состоящую из одного вратаря, двух защитников и трёх нападающих, если в его распоряжении есть два вратаря, 5 защитников и 8 нападающих?

1120

9. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Из трёх математиков и десяти экономистов нужно составить комиссию, в состав которой войдёт семь человек. При этом в ней должен участвовать хотя бы один математик. Сколькими способами может быть составлена комиссия?

1596

10. (*«Физтех», 2016, 10*) В сумме $32 + 33 + 34 + \ldots\ldots + 100$ нужно вычеркнуть несколько слагаемых так, чтобы получившаяся сумма стала равна 4455. Сколькими способами это можно сделать?

20

11. (*«Физтех», 2014, 7–9*) Сколько существует делящихся на 9 одиннадцатизначных натуральных чисел, в записи которых участвуют только цифры 0 и 8?

45

12. (*«Высшая проба», 2014, 7–8*) Трамвайный билет состоит из шести цифр от 0 до 9. Сколько билетов содержат ровно 5 одинаковых цифр?

540

13. (*«Физтех», 2014, 7–8*) Сколько существует способов составить комиссию из семи человек, выбирая её членов из восьми супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?

$\boxed{1024}$

14. (*«Физтех», 2015, 9, 11*) У Миши есть пять банок с красками разного цвета. Сколькими различными способами он может покрасить забор, состоящий из 7 досок, так, чтобы любые две соседние доски были разных цветов и при этом он использовал краски не менее чем трёх цветов?

$\boxed{20460}$

15. (*«Физтех», 2016, 9*) Лабиринт представляет из себя цепочку из 7 комнат. Из первых 4 комнат в следующие ведут 2 двери, из оставшихся в следующую ведут 3 двери (из последней комнаты 3 двери ведут на выход). Лаборант случайным образом запер 10 дверей. Какова вероятность того, что крыса, посаженная в первую комнату, сможет выбраться из лабиринта? Ответ выразите в процентах и округлите до десятых.

$\boxed{2{,}2}$

16. (*«Физтех», 2014, 9*) У Васи есть семь книг по математике, а у Вани — девять. Все 16 книг разные. Сколькими способами они смогут обменяться тремя книгами (то есть дать три книги в обмен на три книги)?

$\boxed{2940}$

17. (*«Физтех», 2014, 10*) Сколько существует 23-значных чисел, сумма цифр которых равна четырём?

$\boxed{2300}$

18. (*«Физтех», 2014, 7–8*) Лёша принес в класс 36 орехов и решил разделить их между собой, Максом и Борей. Сколько способов существует это сделать, если у каждого в итоге должен оказаться хотя бы один орех?

$\boxed{595}$

19. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Три пирата Джо, Билл и Том нашли клад, содержащий 80 одинаковых золотых монет, и хотят разделить их так, чтобы каждому из них досталось не менее 15 монет. Сколько существует способов это сделать?

$\boxed{666}$

20. (*«Ломоносов», 2015, 10–11*) Сколько 9-значных чисел, делящихся на 5, можно составить путём перестановки цифр числа 377 353 752?

$\boxed{1120}$

21. (*«Ломоносов», 2015, 10–11*) Старуха Шапокляк решила обзавестись коллекцией из 50 саквояжей. В магазине ей на выбор предложили оранжевые, зелёные, фиолетовые и голубые саквояжи. Сколькими способами она может сделать покупку? Саквояжи одного цвета считаются идентичными.

$\boxed{23426}$

22. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 9*) У Игоря Горшкова есть все семь книг про Гарри Поттера. Сколькими способами Игорь может расставить эти семь томов на три различные книжные полки так, чтобы на каждой полке стояла хотя бы одна книга? (Расстановки, которые отличаются порядком книг на полке, считаются различными.)

75600

23. (*«Физтех», 2014, 11*) Найдите количество семизначных чисел, в десятичной записи которых могут встречаться только цифры 4, 5, 6, 7 и таких, что каждая цифра не меньше предыдущей.

120

24. (*«Ломоносов», 2016, 9–11*) Даны две параллельные прямые, расстояние между которыми равно 2 см, на каждой отмечено по 10 точек, идущих через 1 см. Нужно из этих 20 точек выбрать 9 таких точек, чтобы расстояние между любыми двумя из них было не менее 2 см. Сколькими способами это можно сделать?

420

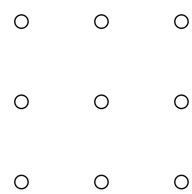
25. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 7–9*) а) В таблице 3×4 надо расставить числа от 1 до 12 так, чтобы разность любых двух чисел, стоящих в одной строке была кратна 3, а разность любых двух чисел в одном столбце — кратна 4. Пример такой расстановки приведён на рисунке. Сколькими способами можно это сделать?

1	4	7	10
5	8	11	2
9	12	3	6

б) Можно ли расставить числа от 1 до 24 в таблице 6×4 так, чтобы разность любых двух чисел в одной строке была кратна 6, а разность любых двух чисел в одном столбце была кратна 4?

а) 144; б) нет

26. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9*) а) На плоскости расположены 9 точек в виде решётки 3×3, как показано на рисунке.



а) Через все возможные пары точек провели прямые. Сколько различных прямых получилось?

б) Сколько существует различных треугольников с вершинами в этих точках?

а) 20; б) 76

27. (*«Физтех», 2017, 10*) На сторонах треугольника ABC отметили точки: 10 — на стороне AB, 11 — на стороне BC, 12 — на стороне AC. При этом ни одна из вершин треугольника не отмечена. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

4951

28. (*«Высшая проба», 2014, 9–10*) В выражении

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^{1000})$$

раскрыли все скобки и привели подобные слагаемые. Сколько слагаемых получилось?

500501

29. (*«Высшая проба», 2014, 11*) В выражении

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^{13})(1+x^{14})(1+x^{1000})^{18}$$

раскрыли все скобки и привели подобные слагаемые. Сколько слагаемых получилось?

$\boxed{2014}$

30. (*«Высшая проба», 2014, 9*) Сколько слагаемых получится после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении $(1+x^2)^{100}(1+x^3)^{100}$?

$\boxed{499}$

31. (*«Высшая проба», 2014, 11*) Сколько слагаемых получится после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении $(1+x^3)^{100}(1+x^4)^{100}$?

$\boxed{695}$

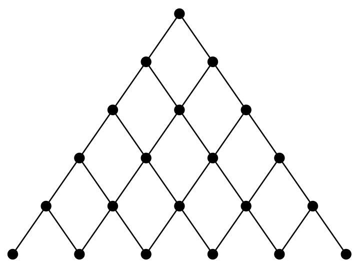
32. (*«Физтех», 2014, 9–10*) Дан выпуклый 15-угольник, никакие три диагонали которого не имеют общих точек, отличных от вершин. Найдите число точек пересечения диагоналей (не считая вершин).

$\boxed{1365}$

33. (*«Физтех», 2014, 9, 11*) Отметили все вершины правильного 12-угольника. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся семизвенных ломаных с вершинами в отмеченных точках?

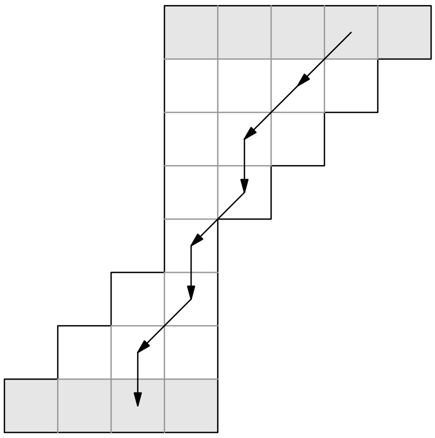
$\boxed{126720}$

34. В треугольнике Паскаля заменим числа точками и соединим точки отрезками следующим образом:



Путём назовём ломаную с началом в вершине треугольника, звенья которой идут по линиям получившейся сетки только вниз. Докажите, что количество путей, ведущих в k-ю точку n-й строки, равно C_n^k (строки нумеруются сверху с нуля; точки в строке нумеруются слева с нуля).

35. (*«Высшая проба», 2014, 9, 11*) Приведённая ниже диаграмма состоит из 24 единичных квадратов. Лягушка из каждой клетки может прыгнуть либо на одну клетку вниз, либо на одну клетку влево-вниз по диагонали (не выходя при этом за границы диаграммы). Сколько существует путей лягушки, ведущих из верхнего ряда квадратов в нижний? (На рисунке показан один из путей лягушки. Верхний и нижний ряды квадратов выделены серым фоном.)



128

36. (*«Высшая проба», 2013, 9*) Сколькими способами можно заполнить цифрами 0, 1, …, 9 (можно с повторениями) таблицу 3×3 так, чтобы сумма цифр в каждой строке и каждом столбце равнялась 4?

120

37. (*«Высшая проба», 2013, 10*) Сколькими способами можно заполнить цифрами 0, 1, …, 9 (можно с повторениями) таблицу 3×3 так, чтобы сумма цифр в каждой строке и каждом столбце равнялась 5?

231

38. (*«Высшая проба», 2013, 11*) Сколькими способами можно заполнить цифрами 0, 1, …, 9 (можно с повторениями) таблицу 3×3 так, чтобы сумма цифр в каждой строке и каждом столбце равнялась 6?

406

39. (*«Физтех», 2013, 10–11*) Тест по английскому языку сдавали 10 школьников. Известно, что любые пять школьников ответили вместе на все вопросы, а любые четыре школьника ответили вместе не на все вопросы. При каком наименьшем количестве вопросов теста такое могло случиться?

210

40. (*«Физтех», 2013*) Число 84605 написали семь раз подряд, при этом получилось 35-значное число

$$84605846058460584605846058460584605.$$

Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычёркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

216

41. (*«Ломоносов», 2014, 8–9*) Дан правильный 27-угольник $A_1A_2\ldots A_{27}$. Найдите количество неравнобедренных треугольников с вершинами в точках A_1, A_2, $\ldots$, A_{27}. Треугольники, отличающиеся порядком вершин (например, $A_1A_2A_4$ и $A_2A_4A_1$), считаются за один треугольник.

$\boxed{2592}$

42. (*«Ломоносов», 2016, 7–8*) Круг разбили на 4 равных сектора по 90°. Сколькими способами можно его раскрасить, если есть 7 цветов и каждый сектор можно красить в любой цвет? Раскраски, которые совпадают при повороте круга, считать одинаковыми.

$\boxed{616}$

43. (*«Высшая проба», 2011, 11*) Сколькими способами можно раскрасить грани куба в чёрный и белый цвета (каждую грань в один цвет, и оба цвета должны быть использованы)? Раскраски считаются одинаковыми, если одну можно получить из другой, повертев куб в руках.

$\boxed{8}$

44. (*«Физтех», 2015, 10*) Дан правильный 16-угольник. Найдите количество четвёрок вершин этого 16-угольника, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, у которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон.

$\boxed{364}$

45. (*«Физтех», 2015, 10*) Дан правильный 20-угольник. Найдите количество четвёрок вершин этого 20-угольника, являющихся вершинами трапеций.

$\boxed{720}$

46. (*«Физтех», 2013*) Дан правильный 24-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен 45°. (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

$\boxed{384}$

47. (*«Физтех», 2013*) Дан правильный 20-угольник. Найдите количество четвёрок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором хотя бы один угол равен 90°. (Две четвёрки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

$\boxed{765}$

48. (*«Физтех», 2014*) Есть семь карточек с цифрами 0, 1, 2, 2, 3, 4, 5. Сколько существует различных шестизначных чисел, делящихся на 15, которые можно сложить из этих карточек?

$\boxed{276}$

49. (*Всеросс., 2014, II этап, 11*) На окружности отмечено 20 точек. Сколько существует таких троек хорд с концами в этих точках, что каждая хорда пересекает каждую (возможно, в концах)?

$\boxed{156180}$

50. (*«Физтех», 2014, 11*) В выпуклом 17-угольнике проводят все его диагонали. На какое наибольшее число частей они могут его разбить?

$\boxed{2500}$

51. (*«Физтех», 2011, 10*) 26 солдат выстроены в одну шеренгу. Сколько существует различных способов выбрать 11 из них так, что никакие двое из них не стоят рядом?

$\boxed{4368}$

52. (*«Физтех», 2011, 11*) В Городском Собрании 24 депутата. Любые двое из них либо дружат, либо враждуют, причём известно, что каждый дружит ровно с 7 другими. Каждые три депутата образуют комиссию. Найдите общее число комиссий, в которых все три члена попарно дружат или все трое попарно враждуют.

$\boxed{680}$

53. (*«Высшая проба», 2011, 9*) В классе 20 учеников, каждый из которых дружит ровно с шестью одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.

$\boxed{360}$

54. (*«Высшая проба», 2011, 9*) Класс из 20 учеников разделён на две половины так, что каждый школьник из первой половины дружит ровно с шестью одноклассниками, а каждый школьник из второй половины дружит ровно с четырьмя одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.

$\boxed{450}$

55. (*«Физтех», 2012, 9–11*) Прямоугольник, составленный из одинаковых квадратных клеток, назовём *чётным*, если он содержит чётное число клеток. Из одинаковых квадратных клеток составлен прямоугольник длиной 9 клеток и шириной 4 клетки. Сколько в нём содержится чётных прямоугольников?

$\boxed{300}$

56. (*«Физтех», 2012, 9–11*) Сколькими способами можно выложить в ряд три красных, четыре синих и пять зелёных шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?

$\boxed{7056}$

57. (*«Физтех», 2012, 10*) Сколько существует способов раскрасить вершины правильного пятиугольника в восемь цветов, если раскраски, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми?

$\boxed{6560}$

58. (*«Высшая проба», 2012, 9*) На плоскости отмечены восемь точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Может ли быть так, что более одной пятой всех выпуклых четырёхугольников с вершинами в этих точках — параллелограммы?

$\boxed{\text{Да}}$

59. (*«Курчатов», 2017, 9*) В конкурсе по физике участвуют 17 школьников. Участникам конкурса было предложено 12 задач. В результате каждую задачу правильно решили больше половины участников. Докажите, что обязательно найдутся три школьника, в объединении решившие все задачи.

60. (*«Курчатов», 2017, 10*) Куб со стороной 5 сложен из 125 кубиков со стороной 1. Сколько маленьких кубиков пересекает плоскость, перпендикулярная одной из диагоналей куба и проходящая через её середину?

55

61. (*«Высшая проба», 2014, 10*) На плосокости даны восемь различных точек. Нумерацию этих точек числами от 1 до 8 назовём *хорошей*, если выполнено следующее условие:

существует такая прямая, что все точки лежат по одну сторону и на разных расстояниях от неё, и при этом расстояния от точек до этой прямой возрастают с возрастанием номера (т. е. ближайшая точка — номер 1, следующая по удалённости — номер 2 и т. д.).

Какое максимальное количество различных хороших нумераций может быть у заданной восьмёрки точек?

56

62. (*«Высшая проба», 2012, 11*) В одной из вершин правильного $2n$-угольника ($n \geqslant 2$) поставлено число 1. Для данной расстановки чисел $2, 3, \ldots, 2n$ в остальные вершины $2n$-угольника поставим на каждой его стороне знак $+$, если число на конце стороны (при движении по часовой стрелке) больше числа на её начале, и знак $-$, если оно меньше. Докажите, что модуль разности между числом расстановок чисел $2, 3, \ldots, 2n$ с чётным количеством плюсов на сторонах и числом расстановок с нечётным количеством плюсов равен числу расстановок, в которых плюсы и минусы чередуются, при (а) $n = 3$; (б) $n = 4$; (в) произвольном n.