Замена переменной

Содержание

В ряде случаев оказывается, что переменная присутствует в уравнении лишь в составе одного и того же устойчивого выражения. Естественный приём в подобных ситуациях — обозначить это устойчивое выражение новой буквой, то есть сделать замену переменной.

С помощью замены переменной можно решать разные виды уравнений. В данной статье не рассматриваются иррациональные уравнения (в которых переменная содержится под знаком корня); они изучаются в отдельной статье «Иррациональные уравнения и системы».

Задача 1. Решить уравнение

$$\frac{x^2+x-2}{x}+\frac{2x}{x^2+x-2}-3=0.$$

Решение. Замена $t=\frac{x^2+x-2}{x}$ приводит к уравнению

$$t+\frac{2}{t}-3=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{t^2-3t+2}{t}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=2. \end{array}\right.$$

Теперь делаем обратную замену. Если $t=1$, то

$$\frac{x^2+x-2}{x}=1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\pm\sqrt{2}.$$

Если же $t=2$, то

$$\frac{x^2+x-2}{x}=2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-x-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\pm\sqrt{2}$, -1, 2.

1 Предварительные преобразования

Устойчивое выражение далеко не всегда присутствует в готовом виде; в большинстве случаев для его поиска нужно как-то преобразовать данное уравнение.

Задача 2. Решить уравнение

$$(x^2-4x)^2+(x-2)^2=6.$$

Решение. Раскрываем вторую скобку:

$$(x^2-4x)^2+x^2-4x+4=6,$$

и видим замену $t = x^2 - 4x$:

$$t^2 + t - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &t = 1, \\ &t = -2 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x^2 - 4x = -1, \\ &x^2 - 4x = 2 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x = 2 \pm \sqrt{3}, \\ &x = 2 \pm \sqrt{6}. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $2 \pm \sqrt{3}$, $2 \pm \sqrt{6}$.

Задача 3. Решить уравнение:

$$(x-1)(x+1)(x+2)(x+4) = 7.$$

Решение. Раскроем скобки, группируя первый множитель с четвёртым, а второй — с третьим:

$$(x^2 + 3x - 4)(x^2 + 3x + 2) = 7.$$

Теперь делаем замену $t = x^2 + 3x - 4$:

$$t(t+6) = 7 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + 6t - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &t = 1, \\ &t = -7 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x^2 + 3x - 4 = 1, \\ &x^2 + 3x - 4 = -7 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x^2 + 3x - 5 = 0, \\ &x^2 + 3x + 3 = 0. \end{aligned}\right.$$

Первое квадратное уравнение данной совокупности имеет корни $x = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$; второе квадратное уравнение корней не имеет.

Ответ: $\frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$.

Задача 4. Решить уравнение

$$x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 16.$$

Решение. В левой части стоит сумма вида $a^2 + b^2$. Вычтем и прибавим величину $2ab$, выделив тем самым квадрат разности:

$$x^2 + \left(\frac{3x}{x+3}\right)^2 - 2x \cdot \frac{3x}{x+3} + 2x \cdot \frac{3x}{x+3} = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{3x}{x+3}\right)^2 + \frac{6x^2}{x+3} = 16 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2 + \frac{6x^2}{x+3} - 16 = 0.$$

Теперь — замена $t = \frac{x^2}{x+3}$:

$$t^2 + 6t - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &t = -8, \\ &t = 2 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &\frac{x^2}{x+3} = -8, \\ &\frac{x^2}{x+3} = 2 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x^2 + 8x + 24 = 0, \\ &x^2 - 2x - 6 = 0. \end{aligned}\right.$$

Первое квадратное уравнение корней не имеет, а второе имеет корни $x = 1 \pm \sqrt{7}$.

Ответ: $1 \pm \sqrt{7}$.

2 Симметрические уравнения

Задача 5. Решить уравнение
$$x^2+2x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=1.$$

Решение. Действие «в лоб» — приведение к общему знаменателю — даст уравнение четвёртой степени, от которого ничего хорошего ждать не приходится (вы увидите ниже, какие в итоге получатся корни — подобрать их не представляется возможным). Нас выручает замена
$$t=x+\frac{1}{x}\,.$$

Заметим, что
$$t^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}\,,$$
откуда
$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2.$$

Теперь исходное уравнение приводится к виду
$$t^2-2+2t=1 \quad\Leftrightarrow\quad t^2+2t-3=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} t=1,\\ t=-3.\end{array}\right.$$

Остаётся сделать обратную замену. В первом случае
$$x+\frac{1}{x}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2-x+1}{x}=0.$$

Это уравнение не имеет корней. Во втором случае
$$x+\frac{1}{x}=-3 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2+3x+1}{x}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\,.$$

Ответ: $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Задача 6. Решить уравнение
$$x^4-5x^3+4x^2+5x+1=0.$$

Решение. Значения $x=\pm1$ не являются корнями данного уравнения, так что приходится расстаться с надеждой подобрать корень. Однако можно заметить, что коэффициенты уравнения симметричны относительно центрального слагаемого (такие уравнения иногда называются *симметрическими*), и благодаря этой симметрии наше уравнение решается точно так же, как и предыдущая задача.

Поскольку $x=0$ не является корнем, можно поделить обе части на x^2 и прийти к равносильному уравнению
$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x-\frac{1}{x}\right)+4=0.$$

Теперь делаем замену $t = x - \frac{1}{x}$:

$$(t^2+2) - 5t + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 5t + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = 3 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{1}{x} = 2, \\ x - \dfrac{1}{x} = 3 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \pm \sqrt{2}, \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $1 \pm \sqrt{2}$, $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.

3 Однородные уравнения

Пусть p и q — некоторые выражения, зависящие от переменной x. Рассмотрим *однородное уравнение второй степени*

$$ap^2 + bpq + cq^2 = 0$$

с ненулевыми коэффициентами a, b и c. Если $q = 0$, то тогда и $p = 0$; если $q \neq 0$, то делим уравнение на q^2 и приходим к равносильному уравнению

$$a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\,\frac{p}{q} + c = 0,$$

квадратному относительно новой переменной $t = p/q$.

Задача 7. Решить уравнение

$$2x^4 + 3x^2(x-2) = 2(x-2)^2.$$

Решение. Здесь $p = x^2$, $q = x - 2$. Если $x - 2 = 0$, то и $x^2 = 0$, что невозможно. Поэтому делим обе части уравнения на $(x-2)^2$ и приходим к равносильному уравнению

$$2\left(\frac{x^2}{x-2}\right)^2 + \frac{3x^2}{x-2} = 2.$$

Замена $t = \frac{x^2}{x-2}$:

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = -2, \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{x-2} = -2, \\ \dfrac{x^2}{x-2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 4 = 0, \\ 2x^2 - x + 2 = 0. \end{array}\right.$$

Первое квадратное уравнение имеет корни $x = -1 \pm \sqrt{5}$, второе квадратное уравнение не имеет корней.

Ответ: $-1 \pm \sqrt{5}$.

4 Замена в биномах

Напомним, что бином — это выражение вида $(a+b)^n$. При раскрытии скобок биномиальные коэффициенты определяются по треугольнику Паскаля:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

(по сторонам идут единицы, а каждое внутреннее число равно сумме двух чисел над ним; на рисунке представлены первые шесть строчек этого треугольника). Так, например,

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4;\\
&(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5.
\end{aligned}
$$

Задача 8. Решить уравнение

$$(x+5)^3 + (x+7)^3 = 8.$$

Решение. Здесь удобно «врезаться посередине» — сделать замену $t = x + 6$. Получим:

$$(t-1)^3 + (t+1)^3 = 8 \quad\Leftrightarrow\quad (t^3 - 3t^2 + 3t - 1) + (t^3 + 3t^2 + 3t + 1) = 8 \quad\Leftrightarrow\quad t^3 + 3t - 4 = 0.$$

Последнее уравнение имеет корень $t = 1$, благодаря чему легко находим разложение на множители:

$$(t-1)(t^2 + t + 4) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad t = 1 \quad\Leftrightarrow\quad x = -5.$$

Ответ: -5.

5 Задачи

Во всех задачах по умолчанию требуется решить уравнение.

1. $x^6 + 9x^3 + 8 = 0.$

$\boxed{-2;\ -1}$

2. $\dfrac{x^2 + x - 5}{x} + \dfrac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0.$

$\boxed{1;\ -5;\ -1 \pm \sqrt{6}}$

3. $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \dfrac{7}{6}\,.$

$\boxed{0;\ -2}$

4. $\dfrac{4}{x^2 + 4} + \dfrac{5}{x^2 + 5} = 2.$

$\boxed{0}$

5. $\dfrac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x = 6.$

$\boxed{1;\ 3}$

6. $x^3 - x^2 - \dfrac{8}{x^3 - x^2} = 2.$

$\boxed{-1;\ 2}$

7. $\dfrac{x^2 + x + 2}{3x^2 + 5x - 14} = \dfrac{x^2 + x + 6}{3x^2 + 5x - 10}\,.$

$\boxed{-4;\ 2}$

8. $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55.$

$\boxed{2;\ -4}$

9. $(x^2 - 3x)^2 - 14x^2 + 42x + 40 = 0.$

$\boxed{-2;\ -1;\ 4;\ 5}$

10. $(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81.$

$\boxed{3;\ 3 \pm 2\sqrt{5}}$

11. $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 9 = 0.$

$\boxed{-\frac{5}{2};\ -2;\ \frac{1}{2};\ 1}$

12. $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 3)(x - 2) = 1.$

$\boxed{2;\ 3}$

13. $10x^2(x - 2)^2 = 9\left(x^2 + (x - 2)^2\right).$

$\boxed{-1;\ 3}$

14. $\dfrac{1}{x(x + 2)} - \dfrac{1}{(x + 1)^2} = \dfrac{1}{12}\,.$

$\boxed{1;\ \text{-}3}$

15. $\dfrac{6}{(x + 1)(x + 2)} + \dfrac{8}{(x - 1)(x + 4)} = 1.$

$\boxed{0;\ -3;\ \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}}$

16. $\dfrac{16}{(x + 6)(x - 1)} - \dfrac{20}{(x + 2)(x + 3)} = 1.$

$\boxed{-7;\ 2}$

17. $(x^2 - 5x)(x + 3)(x - 8) + 108 = 0.$

$\boxed{-1;\ 6;\ \frac{5 \pm \sqrt{97}}{2}}$

18. $(x + 4)^2(x + 10)(x - 2) + 243 = 0..$

$\boxed{-7;\ -1;\ -4 \pm 3\sqrt{3}}$

19. $(x-2)(x-3)^2(x-4)=20.$

$\boxed{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$

20. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120.$

$\boxed{1;\ -6}$

21. $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=10.$

$\boxed{-3\pm\sqrt{6}}$

22. $(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)=1680.$

$\boxed{-2;\ 11}$

23. $x^2+3x+2=15\cdot\dfrac{x^2+5x+10}{x^2+7x+12}\,.$

$\boxed{-7;\ 2}$

24. $(x^2-3x+1)(x^2+3x+2)(x^2-9x+20)=-30.$

$\boxed{\frac{3\pm\sqrt{29}}{2};\ \frac{3\pm\sqrt{25\pm4\sqrt{30}}}{2}}$

25. $\dfrac{1}{6x^2-7x+2}+\dfrac{1}{12x^2-17x+6}=4x^2-5x.$

$\boxed{\frac{5\pm\sqrt{33}}{8}}$

26. $\dfrac{1}{6x^2-7x+2}+\dfrac{1}{12x^2-17x+6}=8x^2-6x+1.$

$\boxed{\frac{1}{2}\pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1+\sqrt{33}}{2}}}$

27. $\dfrac{24}{x^2-2x}=\dfrac{12}{x^2-x}+x^2-x.$

$\boxed{-1,\ 3}$

28. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{10}{9}\,.$

$\boxed{1;\ -3}$

29. $x^2+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{40}{9}\,.$

$\boxed{2;\ -\frac{2}{3}}$

30. $x^2+\dfrac{81x^2}{(x+9)^2}=40.$

$\boxed{1\pm\sqrt{19}}$

31. $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 = \dfrac{45}{16}$.

$\boxed{\pm 3,\ \pm\sqrt{\tfrac{5}{13}}}$

32. $4x^2 + 12x + \dfrac{12}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 47$.

$\boxed{2;\ \tfrac{1}{2};\ \tfrac{-11\pm\sqrt{105}}{4}}$

33. $3\left(x - \dfrac{1}{x}\right) + 2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 4$.

$\boxed{\pm 1;\ -2;\ \tfrac{1}{2}}$

34. $\left(x^2 + \dfrac{16}{x^2}\right) - x - \dfrac{4}{x} - 12 = 0$.

$\boxed{-2;\ 1;\ 4}$

35. $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{48}{x^2} = 10\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x}\right)$

$\boxed{-2;\ 6;\ 3\pm\sqrt{21}}$

36. $x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 1 = 0$.

$\boxed{\tfrac{3\pm\sqrt{5}}{2};\ \tfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}}$

37. $x^4 - 4x^3 + x^2 + 4x + 1 = 0$.

$\boxed{\tfrac{3\pm\sqrt{13}}{2};\ \tfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$

38. $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$.

$\boxed{1;\ 2}$

39. $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0$.

$\boxed{-1\pm\sqrt{3};\ \tfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}}$

40. $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = 5\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

$\boxed{\sqrt{2}\pm 1;\ -\sqrt{2}\pm 1}$

41. $x^3 + x^2 + x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} = 6$.

$\boxed{1}$

42. $\dfrac{(x^2+1)^2}{x(x+1)^2} = \dfrac{625}{112}$.

$\boxed{7;\ \tfrac{1}{7}}$

43. $\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-x+1)^2} = \dfrac{10}{9}\,.$

$\boxed{2;\ \frac{1}{2}}$

44. $(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1) = 9x^2.$

$\boxed{\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2};\ \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}}$

45. $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2.$

$\boxed{-6;\ -4;\ \frac{-15\pm\sqrt{129}}{2}}$

46. $(x-1)(x-2)(x-4)(x-8) = 7x^2.$

$\boxed{\frac{15+\sqrt{37}}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{15+\sqrt{37}}{4}\right)^2 - 8}}$

47. $\dfrac{2x}{x^2-4x+2} + \dfrac{3x}{x^2+x+2} + \dfrac{5}{4} = 0.$

$\boxed{1;\ 2;\ -2\pm\sqrt{2}}$

48. $\dfrac{4x}{x^2+x+3} + \dfrac{5x}{x^2-5x+3} + \dfrac{3}{2} = 0.$

$\boxed{\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}}$

49. $\dfrac{24x}{2x^2-3x+4} = \dfrac{12x}{x^2+x+2} + 5.$

$\boxed{1;\ 2}$

50. $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15} = \dfrac{3x}{x^2-8x+15}\,.$

$\boxed{7\pm\sqrt{34}}$

51. $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-7x+4} + \dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+4} + \dfrac{13}{3} = 0.$

$\boxed{1;\ 4}$

52. $(x^2+4x+8)^2 + 3x^3 + 14x^2 + 24x = 0.$

$\boxed{-4;\ -2}$

53. $2(x^2-x+1)^2 = 9x(x-1)^2.$

$\boxed{2;\ \frac{1}{2};\ 2\pm\sqrt{3}}$

54. $(x^2-2x+2)^2 + 3x(x^2+2x+2) = 30x^2.$

$\boxed{-2\pm\sqrt{2};\ \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}}$

55. $x^4 + 5x^2(x+1) = 6(x+1)^2.$

$\boxed{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};\ -3\pm\sqrt{3}}$

56. $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48\,\dfrac{x^2-4}{x^2-1} = 0.$

$\boxed{3;\ \frac{3}{2}}$

57. $2(x^2+x+1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3-1).$

$\boxed{2;\ 4;\ -1;\ -\frac{1}{2}}$

58. $3(x+2)^2 + 2(x^2-2x+4)^2 = 5(x^3+8).$

$\boxed{1;\ 2;\ \frac{7\pm\sqrt{33}}{4}}$

59. $\dfrac{x^2}{1-2x^2} = 12x^2 + 7x - 6.$

$\boxed{-1;\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ -\frac{3}{4}}$

60. $(x^2+x+1)^2 = x^2(3x^2+x+1).$

$\boxed{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$

61. $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16.$

$\boxed{-3;\ -5}$

62. $(x-1)^5 + (x+3)^5 = 242(x+1).$

$\boxed{-2;\ -1;\ 0}$

63. $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64.$

$\boxed{2;\ 4}$

64. (*МГУ, ф-т почвоведения, 1999*) Найти все значения параметра β, при которых уравнение

$$\left(x^2+x\right)\left(x^2+5x+6\right) = \beta$$

относительно x имеет ровно три корня.

$\boxed{\frac{9}{16}}$

65. (*«Ломоносов», 2012, 8–9*)

$$4(x^3-x) = (x^2+1)^2.$$

$\boxed{1\pm\sqrt{2}}$

66. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11*) При каждом действительном значении параметра a найдите количество различных действительных корней уравнения

$$16x^4 + ax^2 + 1 = 32x^3 + 8x.$$

4 корня при $a < -40$; 3 корня при $a = -40$; 2 корня при $-40 < a < 24$; 1 корень при $a = 24$; нет корней при $a > 24$