

Системы алгебраических уравнений

Содержание

1	Двойная замена	1
2	Симметрические системы	2
3	Сложение уравнений	4
4	Однородные системы	5
5	Умножение и деление уравнений	6
6	Упрощение одного из уравнений	7
7	Системы с тремя неизвестными	8
8	Задачи	11

Если вам встретилась сложная система уравнений, то придётся проявлять изобретательность и отыскивать некий трюк, поскольку никакого единого метода решения таких систем не существует. Необходимым условием успеха в данном случае является большой опыт решения систем уравнений и знание ряда возникающих при этом стандартных ситуаций.

Данная статья посвящена только системам рациональных уравнений (обе части которых суть многочлены или отношения многочленов). Системы иррациональных уравнений будут рассмотрены в статье «[Иррациональные уравнения и системы](#)».

1 Двойная замена

Может оказаться, что две переменные входят в систему лишь в составе двух устойчивых выражений. Обозначаем эти выражения новыми буквами!

Задача 1. Решить систему:

$$\begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 9, \\ \frac{(x + y)x}{y} = 20. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Делаем замену $u = x + y$, $v = \frac{x}{y}$ и приходим к системе

$$\begin{cases} u + v = 9, \\ uv = 20, \end{cases}$$

из которой легко находим $u = 5$, $v = 4$ или $u = 4$, $v = 5$ (здесь и далее подробности в простых ситуациях опускаются). В первом случае получаем систему

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ \frac{x}{y} = 4, \end{cases}$$

решением которой служит пара $x = 4$, $y = 1$. Во втором случае имеем систему

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ \frac{x}{y} = 5, \end{cases}$$

из которой $x = \frac{10}{3}, y = \frac{2}{3}$.

ОТВЕТ: $(4, 1); (\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$.

ЗАДАЧА 2. (МФТИ, 2007) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + 2x - 3y + 2 = 0, \\ 2x^2y - 3xy^2 - 12x + 18y = 16. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Запишем второе уравнение в виде

$$xy(2x - 3y) - 6(2x - 3y) = 16$$

и сделаем двойную замену

$$u = xy, \quad v = 2x - 3y.$$

Система примет вид:

$$\begin{cases} u + v + 2 = 0, \\ uv - 6v = 16. \end{cases}$$

Легко находим: $u = 2, v = -4$, что приводит к системе

$$\begin{cases} xy = 2, \\ 2x - 3y = -4. \end{cases}$$

Эта система также не представляет сложностей. Её решения: $x = 1, y = 2$ или $x = -3, y = -\frac{2}{3}$.

ОТВЕТ: $(1, 2); (-3, -\frac{2}{3})$.

2 Симметрические системы

Функция $f(x, y)$ двух переменных x и y называется *симметрической*, если $f(y, x) = f(x, y)$; иными словами, симметрическая функция переходит сама в себя при одновременной замене x на y и y на x . Например, $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ — симметрическая функция, а $g(x, y) = x^3 + y$ симметрической не является, поскольку $g(y, x) = y^3 + x \neq g(x, y)$.

Система

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

называется *симметрической*, если $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — симметрические многочлены. В симметрических системах отлично работает двойная замена

$$u = x + y, \quad v = xy. \tag{1}$$

ЗАДАЧА 3. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 2 - 2x - 2y, \\ x + y + 5 = -xy. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$\begin{cases} xy(x + y) + 2(x + y) = 2, \\ x + y + xy = -5, \end{cases}$$

или, делая замену (1),

$$\begin{cases} uv + 2u = 2, \\ u + v = -5. \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем $v = -u - 5$ и подставляем это в первое уравнение; после преобразований получим

$$u^2 + 3u + 2 = 0; \quad u_1 = -1, \quad u_2 = -2.$$

Соответственно, $v_1 = -4$, $v_2 = -3$, так что исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + y = -1, \\ xy = -4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = -2, \\ xy = -3. \end{cases}$$

Обе они решаются элементарно.

ОТВЕТ: $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)$; $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$; $(1, -3)$; $(-3, 1)$.

Оказывается, что любой симметрический многочлен двух переменных x, y можно записать как многочлен двух переменных u, v . Это теорема, которую мы не будем доказывать; нам важно уметь выражать через u и v многочлены $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$ и $x^4 + y^4$.

Имеем:

$$u^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 + 2v,$$

откуда

$$x^2 + y^2 = u^2 - 2v.$$

Далее,

$$u^3 = (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = x^3 + y^3 + 3uv,$$

откуда

$$x^3 + y^3 = u^3 - 3uv.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} u^4 &= (x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = \\ &= x^4 + y^4 + 4xy(x^2 + y^2) + 6x^2y^2 = x^4 + y^4 + 4v(u^2 - 2v) + 6v^2, \end{aligned}$$

откуда

$$x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2.$$

ЗАДАЧА 4. Решить систему

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (xy + 8)(x + y) = 2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Легко видеть, что эта система является симметрической. Делая замену $u = x + y$, $v = xy$, получим систему

$$\begin{cases} u^3 - 3uv = 19, \\ u(v + 8) = 2. \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем $uv = 2 - 8u$ и подставляем в первое уравнение:

$$u^3 - 3(2 - 8u) = 19 \Leftrightarrow u^3 + 24u - 25 = 0.$$

Очевиден корень $u = 1$, что позволяет разложить левую часть на множители:

$$(u - 1)(u^2 + u + 25) = 0 \Leftrightarrow u = 1.$$

Далее находим $v = -6$ и приходим к системе

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -6, \end{cases}$$

откуда $x = 3, y = -2$ или наоборот, $x = -2, y = 3$.

ОТВЕТ: $(3, -2); (-2, 3)$.

Обратите внимание, что у симметрической системы и ответ симметричен: если пара (x_0, y_0) является решением, то и пара (y_0, x_0) — тоже решение.

3 Сложение уравнений

Одно из уравнений системы можно заменить на сумму (или разность) её уравнений. В результате получим систему, эквивалентную исходной.

ЗАДАЧА 5. Решить систему

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^2y + xy^2 = -2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Эту симметрическую систему можно решить общим методом, изложенным выше. Но можно и сразу сложить первое уравнение с утроенным вторым:

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 1 \Leftrightarrow (x + y)^3 = 1 \Leftrightarrow x + y = 1.$$

Отсюда $y = 1 - x$; подставляем это в первое уравнение системы:

$$x^3 - (x - 1)^3 = 7 \Leftrightarrow x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 7 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0.$$

Дальше ясно.

ОТВЕТ: $(-1, 2); (2, -1)$

ЗАДАЧА 6. (МГУ, филологич. ф-т, 2007) Решите систему

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 3y = 0, \\ 2y^2 + y + 3x = 0. \end{cases} \quad (2)$$

РЕШЕНИЕ. Вычитаем из первого уравнения второе:

$$0 = 2(x^2 - y^2) - 4(x + y) = 2(x + y)(x - y - 2).$$

Если $y = -x$, то первое уравнение системы (2) даёт $2x^2 + 2x = 0$, откуда $x = 0$ (и тогда $y = 0$) или $x = -1$ (и тогда $y = 1$).

Если же $y = x - 2$, то первое уравнение (2) приводит к уравнению $x^2 - 2x + 3 = 0$, которое не имеет корней.

ОТВЕТ: $(0, 0); (-1, 1)$.

4 Однородные системы

Функция $f(x, y)$ двух переменных x и y называется *однородным многочленом второй степени*, если она имеет вид

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

(с очевидным дополнительным условием, что не все коэффициенты a , b и c равны нулю). Аналогично определяются однородные многочлены более высоких степеней; например, однородный многочлен третьей степени имеет вид

$$f(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3.$$

Однородная система (второй степени) — это система вида

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2, \end{cases} \quad (3)$$

где d_1 и d_2 — некоторые числа. Если оба они не равны нулю, то, умножая уравнения (3) на подходящие множители (например, на d_2 и d_1 соответственно) и вычитая их друг из друга, мы получим однородный многочлен, равный нулю.

ЗАДАЧА 7. Решить систему

$$\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 2y^2 = 20, \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Умножим первое уравнение на 7, а второе — на 20:

$$\begin{cases} 21x^2 + 35xy - 14y^2 = 140, \\ 20x^2 + 20xy + 20y^2 = 140. \end{cases}$$

Вычитаем из первого уравнения второе:

$$x^2 + 15xy - 34y^2 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно x (с параметром y), находим $x = 2y$ или $x = -17y$. Остаётся подставить это в любое уравнение исходной системы (проще во второе) и довести задачу до ответа. Сделайте это самостоятельно.

ОТВЕТ: $(2, 1)$; $(-2, -1)$; $\left(-\frac{17}{\sqrt{39}}, \frac{1}{\sqrt{39}}\right)$; $\left(\frac{17}{\sqrt{39}}, -\frac{1}{\sqrt{39}}\right)$

ЗАДАЧА 8. («Физтех», 2012) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{6x}{y} + \frac{2y}{x} - 5 = 4xy, \\ \frac{7x}{y} + \frac{4y}{x} - 10 = 3xy. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Формально это не совсем система вида (3), то принцип действия тот же. Умножим первое уравнение на 3, второе на 4, после чего вычтем из первого второе:

$$-\frac{10x}{y} - \frac{10y}{x} + 25 = 0.$$

Теперь делаем замену $t = \frac{x}{y}$:

$$2t + \frac{2}{t} - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2 - 5t + 2}{t} = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ или } t = \frac{1}{2}.$$

При $t = 2$ имеем $x = 2y$; первое уравнение даёт тогда $8y^2 = 8$, $y = \pm 1$, откуда $x = \pm 2$ (знак x совпадает со знаком y). Аналогично рассматривается случай $t = \frac{1}{2}$.

ОТВЕТ: $(2, 1)$; $(-2, -1)$; $(\frac{1}{2}, 1)$; $(-\frac{1}{2}, -1)$.

5 Умножение и деление уравнений

Под умножением уравнений $A = B$ и $C = D$ мы понимаем переход к уравнению $AC = BD$, а под делением — переход к уравнению $A/C = B/D$. В последнем случае необходимо проследить за тем, чтобы не получить нуль в знаменателе.

ЗАДАЧА 9. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 y^3 = 16, \\ x^3 y^2 = 2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Ясно, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Делим первое уравнение на второе:

$$\frac{y}{x} = 8 \Leftrightarrow y = 8x.$$

Подставим это во второе уравнение:

$$x^3 \cdot 64x^2 = 2 \Leftrightarrow x^5 = \frac{1}{32} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Теперь находим $y = 4$.

ОТВЕТ: $(\frac{1}{2}, 4)$.

ЗАДАЧА 10. (МФТИ, 2006) Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 5\sqrt[3]{x^5 y^2} = 4(x^2 + y^2), \\ 3\sqrt[3]{xy^4} = x^2 - y^2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Формально мы имеем дело с иррациональными уравнениями, которые будут рассматриваться в одной из следующих статей. Однако никакой специфики иррациональных уравнений тут на самом деле нет.

Отметим сразу же, что если одна из переменных равна нулю, то и вторая равна нулю. Пара $(0, 0)$ является решением системы, а остальные решения ищем в предположении $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

Перемножаем наши уравнения:

$$\begin{aligned} 15x^2 y^2 = 4(x^4 - y^4) &\Leftrightarrow 4x^4 - 15x^2 y^2 - 4y^4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 4y^2)(4x^2 + y^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4y^2 \Leftrightarrow x = \pm 2y. \end{aligned}$$

Если $x = 2y$, то второе уравнение даёт:

$$3\sqrt[3]{2y^5} = 3y^2 \Leftrightarrow 2y^5 = y^6 \Leftrightarrow y = 2,$$

и тогда $x = 4$. Аналогично, если $x = -2y$, то $y = -2$ и $x = 4$.

ОТВЕТ: $(0, 0)$; $(4, 2)$; $(4, -2)$.

В наиболее сложных случаях перед умножением или делением уравнений нужно ещё основательно поработать.

ЗАДАЧА 11. (МФТИ, 2006) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{y^2}{x^2}(2+x) = 4y - 3x, \\ 2y^2 - 3xy = 4y - x^2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Умножаем первое уравнение на x^2 (ограничение $x \neq 0$ будет учтено позже):

$$\begin{cases} 2y^2 + xy^2 = 4x^2y - 3x^3, \\ 2y^2 - 3xy = 4y - x^2. \end{cases}$$

Теперь наступает самый трудный момент: нужно разглядеть «хорошие» квадратные трёхчлены $t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3)$ и $t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$ с общим множителем $t-1$. Перепишем систему следующим образом:

$$\begin{cases} x(y^2 - 4xy + 3x^2) = -2y^2, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y-x)(y-3x) = -2y^2, \\ (x-y)(x-2y) = 4y. \end{cases}$$

Легко видеть, что обе части второго уравнения не могут обращаться в нуль (предполагая обратное, в каждом случае приходим к равенству $x = 0$ вопреки ограничению). Делим первое уравнение на второе:

$$\frac{x(y-3x)}{x-2y} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow 2y^2 + xy - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow (y+2x)(2y-3x) = 0.$$

Отсюда имеем $y = -2x$ или $y = \frac{3}{2}x$. Остаётся подставить это во второе (так проще) уравнение исходной системы и после элементарных вычислений получить ответ.

ОТВЕТ: $(-\frac{8}{15}, \frac{16}{15})$; $(6, 9)$.

6 Упрощение одного из уравнений

В отдельных случаях одно из уравнений системы удаётся привести к виду $AB = 0$, где A и B — некоторые (несложные) выражения, зависящие от переменных.

ЗАДАЧА 12. (МФТИ, 1999) Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^9 - x^8 - 2y^2 = 0, \\ x^7 + \frac{y^3}{x^4} = y^2 + yx^3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Первое уравнение ничего хорошего нам не сулит, поэтому возьмёмся за второе. Помня об ограничении $x \neq 0$, умножаем его на x^4 :

$$x^{11} + y^3 = x^4y^2 + x^7y \Leftrightarrow x^7(x^4 - y) - y^2(x^4 - y) = 0 \Leftrightarrow (x^7 - y^2)(x^4 - y) = 0.$$

Отсюда имеем $y^2 = x^7$ или $y = x^4$.

Пусть сначала $y^2 = x^7$. Подставляем это в первое уравнение:

$$x^9 - x^8 - 2x^7 = 0,$$

что при ограничении $x \neq 0$ равносильно квадратному уравнению

$$x^2 - x - 2 = 0$$

с корнями -1 и 2 . Корню $x = -1$ не соответствует никакое значение y (ибо $y^2 = -1$), а для корня $x = 2$ получаем $y^2 = 2^7$, то есть $y = \pm 8\sqrt{2}$.

Пусть теперь $y = x^4$. Подставляем в первое уравнение:

$$x^9 - 3x^8 = 0,$$

откуда с учётом ограничения $x \neq 0$ имеем $x = 3$ и соответственно $y = 81$.

ОТВЕТ: $(2, 8\sqrt{2})$; $(2, -8\sqrt{2})$; $(3, 81)$.

Может случиться, что уравнение, воспринимаемое как квадратное относительно одной из переменных, имеет «хороший» дискриминант.

ЗАДАЧА 13. (МФТИ, 2008) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 + 5x - 9y + 4 = 0, \\ x^2 - y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Второе уравнение имеет довольно простой вид, и вместе с тем ничего полезного из него не извлечёшь. Поэтому работать надо с первым уравнением. Запишем его как квадратное относительно x (с параметром y):

$$x^2 + (5 - 3y)x + 2y^2 - 9y + 4 = 0.$$

Дискриминант:

$$D = (5 - 3y)^2 - 4(2y^2 - 9y + 4) = y^2 + 6y + 9 = (y + 3)^2,$$

откуда

$$x = \frac{3y - 5 + (y + 3)}{2} = 2y - 1 \quad \text{или} \quad x = \frac{3y - 5 - (y + 3)}{2} = y - 4.$$

Остаётся сделать эти подстановки во второе уравнение. Несложные технические детали описывать не будем — вы легко сможете довести решение до конца самостоятельно.

ОТВЕТ: $(3, 2)$; $(-\frac{7}{3}, -\frac{2}{3})$; $(-\frac{21}{8}, \frac{11}{8})$.

7 Системы с тремя неизвестными

Системы трёх уравнений с тремя неизвестными решаются теми же методами, которые были изложены выше. Разумеется, задачи в целом становятся сложнее.

ЗАДАЧА 14. (ОММО, 2012) Решите систему

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = 1, \\ \frac{yz}{y+z} = 2, \\ \frac{xz}{x+z} = 3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнения в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = 1, \\ \frac{y+z}{yz} = \frac{1}{2}, \\ \frac{x+z}{xz} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Теперь делаем замену $u = 1/x$, $v = 1/y$, $w = 1/z$ и приходим к системе

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ v + w = \frac{1}{2}, \\ u + w = \frac{1}{3}, \end{cases}$$

которая решается элементарно: $u = \frac{5}{12}$, $v = \frac{7}{12}$, $w = -\frac{1}{12}$. Отсюда легко получаем ответ.

ОТВЕТ: $(\frac{12}{5}, \frac{12}{7}, -12)$.

ЗАДАЧА 15. (МФТИ, 2002) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^3 - y^3 - 2z^3 + xyz + 5 = 0, \\ y^3 + 2z^3 - x^3 - 2xyz - 2 = 0, \\ x^3 - y^3 - z^3 + xyz + 4 = 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Сложим первое уравнение со вторым:

$$x^3 - xyz + 3 = 0. \quad (4)$$

Вычтем из первого уравнения исходной системы удвоенное третье:

$$y^3 - xyz - 3 = 0. \quad (5)$$

Наконец, сложим второе уравнение исходной системы с третьим:

$$z^3 - xyz + 2 = 0. \quad (6)$$

Исходная система равносильна системе уравнений (4)–(6):

$$\begin{cases} x^3 = xyz - 3, \\ y^3 = xyz + 3, \\ z^3 = xyz - 2. \end{cases} \quad (7)$$

Перемножим уравнения этой системы и сделаем замену $t = xyz$:

$$t^3 = (t-3)(t+3)(t-2) \Leftrightarrow 2t^2 + 9t - 18 = 0.$$

Отсюда $t = -6$ или $t = \frac{3}{2}$. Остаётся подставить эти значения в систему (7) и найти x , y , z .

ОТВЕТ: $(-\sqrt[3]{9}, -\sqrt[3]{3}, -2)$; $(-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}, \sqrt[3]{\frac{9}{2}}, -\sqrt[3]{\frac{1}{2}})$.

ЗАДАЧА 16. (МФТИ, 2004) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (3y - x)^2 = 2 + z^2, \\ (3y + z)^2 = 3 + x^2, \\ (z - x)^2 = 4 + 9y^2. \end{cases} \quad (8)$$

РЕШЕНИЕ. Здесь дело идёт к делению уравнений. Перепишем систему следующим образом:

$$\begin{cases} (x - 3y)^2 - z^2 = 2, \\ x^2 - (3y + z)^2 = -3, \\ (x - z)^2 - 9y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3y + z)(x - 3y - z) = 2, \\ (x - 3y - z)(x + 3y + z) = -3, \\ (x + 3y - z)(x - 3y - z) = 4. \end{cases} \quad (9)$$

Левые части наших уравнений не равны нулю. Делим первое уравнение системы (9) на второе:

$$\frac{x - 3y + z}{x + 3y + z} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow 5x - 3y + 5z = 0. \quad (10)$$

Делим третье уравнение системы (9) на первое:

$$\frac{x + 3y - z}{x - 3y + z} = 2 \Leftrightarrow x - 9y + 3z = 0. \quad (11)$$

Исходная система (8) равносильна системе, составленной из первого уравнения (8) и уравнений (10) и (11):

$$\begin{cases} (3y - x)^2 = 2 + z^2, \\ 5x - 3y + 5z = 0, \\ x - 9y + 3z = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Из третьего уравнения системы (12) имеем $x = 9y - 3z$; подставим это во второе уравнение и найдём $y = \frac{5}{21}z$, откуда $x = 9 \cdot \frac{5}{21}z - 3z = -\frac{6}{7}z$. Полученные выражения x и y через z подставляем в первое уравнение (12) и в результате находим $z = \pm\frac{7}{6}$, после чего определяем соответствующие значения x и y .

ОТВЕТ: $(-1, \frac{5}{18}, \frac{7}{6})$; $(1, -\frac{5}{18}, -\frac{7}{6})$.

ЗАДАЧА 17. («Физтех», 2009) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (y - x)(x^2 + y^2) = 15, \\ (y + z)(y^2 + z^2) = -13, \\ (z - x)(x^2 + z^2) = -20. \end{cases} \quad (13)$$

РЕШЕНИЕ. Мы хотим домножить каждое из уравнений на соответствующий множитель так, чтобы получить в левых частях разности четвёртых степеней. Однако равносильность такого преобразования требует обоснования.

Пусть $y + x = 0$, то есть $y = -x$. Тогда второе уравнение системы (13) примет вид

$$(z - x)(x^2 + z^2) = -13;$$

сопоставляя это с третьим уравнением (13), мы видим, что система (13) не будет иметь решений. Таким образом, ни одна тройка чисел (x, y, z) , для которой выполнено $y + x = 0$, не является решением системы (13); иными словами, умножив первое уравнение на $y + x$, мы получим систему, равносильную исходной.

Точно так же показывается, что ни одна тройка (x, y, z) , для которой выполнено $z - y = 0$ или $x + z = 0$, не является решением системы (13). Умножая первое уравнение нашей системы на $y + x$, второе — на $z - y$, третье — на $x + z$, придём к равносильной системе

$$\begin{cases} y^4 - x^4 = 15(y + x), \\ z^4 - y^4 = 13(y - z), \\ x^4 - z^4 = 20(x + z). \end{cases}$$

Сложим эти три уравнения: $0 = 28y + 35x + 7z$, откуда $z = -5x - 4y$. Подставляя это в третье уравнение (13) и присоединяя первое уравнение (13), получим систему двух уравнений относительно x и y :

$$\begin{cases} (y - x)(x^2 + y^2) = 15, \\ (-6x - 4y)(x^2 + (5x + 4y)^2) = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = -15, \\ 39x^3 + 86x^2y + 64xy^2 + 16y^3 = 5. \end{cases}$$

Получилась однородная система третьей степени. Мы уже знаем, что нужно делать: умножаем второе уравнение на 3 и складываем с первым уравнением:

$$118x^3 + 257x^2y + 193xy^2 + 47y^3 = 0. \quad (14)$$

Если $x = 0$, то в силу этого уравнения и $y = 0$ вопреки первому уравнению системы (13). Поэтому делим уравнение (14) на $x^3 \neq 0$ и обозначаем $t = \frac{y}{x}$:

$$47t^3 + 193t^2 + 257t + 118 = 0. \quad (15)$$

Это, конечно, «жесть», но что поделаешь? Остаётся уповать лишь на то, что подберётся «маленький» корень. Ясно, что положительных корней уравнение (15) не имеет, поэтому начинаем с «маленьких» отрицательных. И действительно, $t = -2$ является корнем! Имеем:

$$(47t^3 + 94t^2) + (99t^2 + 198t) + (59t + 118) = 0 \Leftrightarrow (t + 2)(47t^2 + 99t + 59) = 0.$$

Дискриминант уравнения $47t^2 + 99t + 59 = 0$ отрицателен, поэтому уравнение (15) имеет лишь один корень $t = -2$. Отсюда $y = -2x$, и теперь закончить решение труда не составляет.

ОТВЕТ: $(-1, 2, -3)$.

8 Задачи

Во всех задачах требуется решить систему уравнений.

$$1. \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

(7'8):(8'7)

$$2. \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{13}{6}, \\ xy = 5. \end{cases}$$

(1-5):(1'5)

$$3. \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{x^3}{y^3} = 14, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

(1'7)

$$4. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13. \end{cases}$$

$$\left(\frac{3}{1}, \frac{2}{1} \right); \left(\frac{3}{1}, \frac{3}{1} \right)$$

$$5. \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{y}{3} = 3, \\ \frac{x}{2} + \frac{3}{y} = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$(3, 1); (9, 2)$$

$$6. \begin{cases} x + y + \frac{x^2}{y^2} = 7, \\ \frac{(x+y)x^2}{y^2} = 12. \end{cases}$$

$$(2, 1); (6, -3); (6 + 2\sqrt{3}, -2 - 2\sqrt{3}); (9 - 6\sqrt{3}, -2 + 2\sqrt{3})$$

$$7. \begin{cases} \frac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \frac{2y}{x} = 1, \\ x^2 + y^2 + \frac{4x}{y} = 22. \end{cases}$$

$$(3, 1); (-3, -1); \left(\frac{4\sqrt{106}}{99}, \frac{53}{4\sqrt{106}} \right); \left(-\frac{4\sqrt{106}}{99}, -\frac{53}{4\sqrt{106}} \right)$$

$$8. \begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + \frac{x^3}{y^3} = 12, \\ x^2y^2 + xy = 6. \end{cases}$$

$$(2, 1); (-2, -1)$$

$$9. \begin{cases} xy - \frac{x}{y} = \frac{16}{3}, \\ xy - \frac{y}{x} = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

$$(2, 3); (-2, -3)$$

10. (МГУ, экономич. ф-т, 2002)

$$\begin{cases} y - xy - x = 11, \\ xy^2 - x^2y = -30. \end{cases}$$

$$(-2, 3); (-3, 2); (-1, 5); (-5, 1)$$

11. (МГУ, геологич. ф-т, 1998)

$$\begin{cases} x(1+y) = y+7, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$$

$$(3, 2); (-2, -3); (3 + \sqrt{10}, -3 + \sqrt{10}); (3 - \sqrt{10}, -3 - \sqrt{10})$$

12. (МГУ, физический ф-т, 2003)

$$\begin{cases} \frac{17}{2x^2 + 3y} + \frac{12}{3x^2 - 2y} = 3, \\ \frac{6}{3x^2 - 2y} + \frac{34}{2x^2 + 3y} = 3. \end{cases}$$

(8'7) ; (8'7-)

13. (МФТИ, 2007)

$$\begin{cases} 2xy + 4x + 3y = 2, \\ 4x^2y + 3xy^2 + 12x + 9y = 8. \end{cases}$$

($\frac{8}{3} - \frac{8}{3}$) ; ($\frac{8}{3} - \frac{8}{3}$)

14. (МГУ, ф-т почвоведения, 2007)

$$\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$$

(1'8) ; (8'1)

15.
$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 3x - 3y + xy = -1, \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3xy = 1. \end{cases}$$

(1'1)

16.
$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 20, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

($\frac{2}{14\sqrt{-5}}$, $\frac{2}{14\sqrt{3}}$) ; ($\frac{2}{14\sqrt{3}}$, $\frac{2}{14\sqrt{-5}}$) ; (1, 4) ; (4, 1)

17. («Покори Воробьёвы горы!», 2010)

$$\begin{cases} x^2y + x + xy^2 + y + 5 = 0, \\ x + y + xy + 5 = 0. \end{cases}$$

(0, 5-) ; (5- , 0) ; (8, 7-) ; (7- , 8)

18. (ОММО, 2016)

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 931. \end{cases}$$

(8, 5) ; (5, 8) ; (8, 5-) ; (5-, 8)

19.
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + 2x^2y + 2xy^2 = 21, \\ 2x^3 + 2y^3 + x^2y + xy^2 = 24. \end{cases}$$

(1'7) ; (7'1)

$$20. \begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$$

(1, 2); (2, 1)

$$21. \begin{cases} x^6 + y^6 = 65, \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13. \end{cases}$$

(1, -2); (-2, 1); (1, 1); (1, -1); (-1, 1); (-1, -1); (2, 2); (2, -2); (-2, 2); (-2, -2)

$$22. \begin{cases} x^4 + y^4 = 17(x + y)^2, \\ xy = 2x + 2y. \end{cases}$$

(0, 0); (1, -2); (-2, 1); (3, 9); (9, 3)

$$23. \begin{cases} 10(x^4 + y^4) = -17(x^3y + xy^3), \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

(-1, 1); (1, -1); (2, -2); (-2, 2); (1, 1); (-1, -1)

$$24. \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3y = 9, \\ 2x^2 + 2y^2 + x - 5y = 1. \end{cases}$$

(1, 2); (-1, 2); (2, 1); (2, 3); (3, 1); (3, 2)

$$25. \begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ x^2y + xy^2 = -6. \end{cases}$$

(3, -2); (-2, 3)

$$26. \begin{cases} x^3 - y^3 = 65, \\ x^2y - xy^2 = -20. \end{cases}$$

(4, -1); (-1, 4)

$$27. \begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 158, \\ 3x^2y + y^3 = -185. \end{cases}$$

(2, -5)

28. (МГУ, филологич. ф-т, 2007)

$$\begin{cases} x^2 - 2y - 3 = 0, \\ y^2 + 2x - 3 = 0. \end{cases}$$

(3, 3); (-1, -1)

29. (МГУ, географич. ф-т, 2002)

$$\begin{cases} x^3 = 5x + y, \\ y^3 = 5y + x. \end{cases}$$

$$\left(\frac{z}{z^2 + \varepsilon z - 1}, \frac{z}{z^2 - \varepsilon z - 1} \right); \left(\frac{z}{z^2 - \varepsilon z - 1}, \frac{z}{z^2 + \varepsilon z - 1} \right); \left(\frac{z}{z^2 + \varepsilon z - 1}, \frac{z}{z^2 - \varepsilon z - 1} \right); \left(\frac{z}{z^2 - \varepsilon z - 1}, \frac{z}{z^2 + \varepsilon z - 1} \right);$$

$$; \left(\varepsilon z - 1, \varepsilon z - 1 \right); \left(\varepsilon z, \varepsilon z \right); (z, z); (z, z); (0, 0)$$

30. (МФТИ, 2008)

$$\begin{cases} 3x^2 = y^4 + y, \\ 5x = \frac{2y}{x} + y^2. \end{cases}$$

$$\left(\frac{z}{z^2 - 1}, \frac{z}{z^2 - 1} \cdot z \right); \left(\frac{z}{z^2 - 1}, \frac{z}{z^2 - 1} \cdot z \right)$$

31. («Ломоносов», 2016, 10–11) Даны 2017 уравнений: $x_1 + x_2 = -2016$, $x_2 + x_3 = -2014$, ..., $x_{1008} + x_{1009} = -2$, $x_{1009} + x_{1010} = 0$, $x_{1010} + x_{1011} = 2$, $x_{1011} + x_{1012} = 4$, ..., $x_{2016} + x_{2017} = 2014$, $x_{2017} + x_1 = 2016$. Найдите x_{2017} .

9101

32.
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$$

$$(1, z); (1, z)$$

33.
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ 2xy - x^2 = 3. \end{cases}$$

$$\left(\frac{\varepsilon z}{\varepsilon z - 1}, \frac{\varepsilon z}{\varepsilon z - 1} \right); \left(\frac{\varepsilon z}{\varepsilon z - 1}, \frac{\varepsilon z}{\varepsilon z - 1} \right); (z, z); (z, z)$$

34.
$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 20, \\ x^2 - 4xy + 7y^2 = 13. \end{cases}$$

$$\left(\frac{z^2}{z^2 - 1}, \frac{z^2}{z^2 - 1} \right); \left(\frac{z^2}{z^2 - 1}, \frac{z^2}{z^2 - 1} \right); (z, z); (z, z)$$

35. (ОММО, 2015, 9–11)

$$\begin{cases} 5x^2 + 14xy + 10y^2 = 17, \\ 4x^2 + 10xy + 6y^2 = 8. \end{cases}$$

$$(z, 1); (z, 1); (z, 1); (z, 1)$$

36. (МГУ, геологич. ф-т, 2003)

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + 3 = 0, \\ 6y^3 - 18y - 13x^3 - 3x = 0. \end{cases}$$

$$\left(\frac{611}{\varepsilon} \wedge 11, \frac{611}{\varepsilon} \wedge 11 \right); \left(\frac{611}{\varepsilon} \wedge 11, \frac{611}{\varepsilon} \wedge 11 \right); (\varepsilon z, 0); (\varepsilon z, 0)$$

37. («Физтех», 2012)

$$\begin{cases} \frac{5x}{y} - \frac{9y}{x} + 10 = \frac{6}{xy}, \\ \frac{2x}{y} + \frac{3y}{x} + 4 = \frac{9}{xy}. \end{cases}$$

(1'ε-) '(1-ε) :(1-1-) :(1'1)

38. («Физтех», 2014)

$$\begin{cases} y^3 - x^2 - xy + 1 = 0, \\ 2y^3 - 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 2 = 0. \end{cases}$$

$\left(\frac{z}{x^2+1}, 1-\frac{x}{z}\right) ; \left(\frac{z}{x^2-1}, 1-\frac{x}{z}\right) ; (1'z-) ; (1-1)$

39. (ограничиться отысканием целочисленных решений)

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 2, \\ 2xy^2 - x^2y = 1. \end{cases}$$

(1'1)

40.
$$\begin{cases} (x-y)xy = 30, \\ (x+y)xy = 120. \end{cases}$$

(ε'ε)

41.
$$\begin{cases} y^2 - xy = -12, \\ x^2 - xy = 28. \end{cases}$$

(ε-1-) :(ε'1)

42.
$$\begin{cases} x^2y^3 + x^3y^2 = 12, \\ x^2y^3 - x^3y^2 = 4. \end{cases}$$

(z'1)

43.
$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 15, \\ x^3y - xy^3 = 6. \end{cases}$$

(1-z-) :(1'z)

44.
$$\begin{cases} (x+y)(x^2 - y^2) = 16, \\ (x-y)(x^2 + y^2) = 40. \end{cases}$$

(ε-1) :(1-ε)

45. («Физтех», 2016, 9–11)

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 - 2x - 2y + 10 = 0, \\ x^3y - xy^3 - 2x^2 + 2y^2 - 30 = 0. \end{cases}$$

(-4, -1)

46. (МФТИ, 2006)

$$\begin{cases} 5\sqrt[3]{2x^2y^3} = 2(x^2 + y^2), \\ 3\sqrt[3]{4x^4y^3} = 4(y^2 - x^2). \end{cases}$$

(0, 0); (-2, 4); (2, 4)

47. (МФТИ, 2000)

$$\begin{cases} \frac{x^3}{2y} + 3xy = 25, \\ \frac{y^3}{x} - 2xy = 16. \end{cases}$$

(2, 4); (-2, -4)

48. (МФТИ, 2000)

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y^2} + \frac{3y}{4x} = 2, \\ \frac{8y}{x^2} - \frac{6x}{y} = 5. \end{cases}$$

(2, 4); ($\frac{256}{375}$, $-\frac{5625}{2048}$)

49. (МФТИ, 2005)

$$\begin{cases} 8x^2y - 3x^4 = 4, \\ 8y^3 - 3x^2y^2 = 2. \end{cases}$$

($1, \sqrt[3]{1}$); ($\sqrt[3]{2}, 1$)

50. (МФТИ, 2006)

$$\begin{cases} \frac{y^2}{x^2}(3 + 2x) = 3y - x, \\ y^2 + 2xy = 3x^2 - 2y. \end{cases}$$

($-\frac{12}{35}$, $\frac{8}{35}$); ($-\frac{2}{1}$, $\frac{2}{1}$)

51. (МФТИ, 2004)

$$\begin{cases} y^7 + 2y^6 + 3x^2 = 0, \\ y^4 - xy = \frac{x^3}{y^4} - \frac{x^2}{y}. \end{cases}$$

(-125, -5); (-3, $\sqrt[3]{6}$); ($\sqrt[3]{9}$, -6)

52. (МФТИ, 2002)

$$\begin{cases} y + \frac{x^3}{y^3} = \frac{y^3}{x} + \frac{x^2}{y}, \\ \frac{1}{y} + \frac{y^3}{x^3} + \frac{10}{x^2} = 0. \end{cases}$$

(7, -7)

53. (МФТИ, 2008)

$$\begin{cases} xy + y^2 - 2x^2 + 10x + 8y + 12 = 0, \\ x^2 - y^2 + 7 = 0. \end{cases}$$

$(\frac{71}{43}, \frac{71}{62}) ; (\frac{8}{8}, \frac{8}{1}) ; (4, 8)$

54. (МФТИ, 1996)

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 - 10x - 8y - 12 = 0, \\ 2x^2 + 3xy + y^2 + x - y - 6 = 0. \end{cases}$$

(3, -3); (0, -2); (2, -4); (7, -2)

55. (МГУ, ВКНМ, 2000)

$$\begin{cases} 3x + y - z = 4, \\ x - 2y + 3z = 0, \\ x^2 + 2y + z^2 = 6x. \end{cases}$$

$(1, 2, 1) ; (\frac{14}{28}, \frac{25}{28}, -\frac{5}{28}) ; (\frac{14}{108}, \frac{25}{108}, -\frac{5}{108})$

56. (ОММО, 2012)

$$\begin{cases} \frac{ab}{a+b} = 1, \\ \frac{bc}{b+c} = 2, \\ \frac{ca}{c+a} = 4. \end{cases}$$

$(8, \frac{8}{8}, \frac{8}{8})$

57. (ОММО, 2018)

$$\begin{cases} x^2 = (y - z)^2 - 3, \\ y^2 = (z - x)^2 - 7, \\ z^2 = (x - y)^2 + 21. \end{cases}$$

(3, 5, -1); (-3, 5, 1)

64. (МФТИ, 2006)

$$\begin{cases} 2yz + \frac{3}{x} + 3 = 0, \\ xy + \frac{4}{z} - 2 = 0, \\ xz + \frac{2}{y} + 2 = 0. \end{cases}$$

(1-2'8)

65. (МФТИ, 2003)

$$\begin{cases} 4zx^2 - yz^2 + 2xy^2 = 3xyz, \\ zy^2 + 2xz^2 - 4yx^2 = 3xyz, \\ 2xy - 2xz + yz = 3. \end{cases}$$

(z'1'z/1-) : (z-1-'z/1) : (1-z-'z/1) : (1'z'z/1) : (1'1-'1-) : (1-'1'1)

66. (МФТИ, 2001)

$$\begin{cases} 3x - y - 5z - 2yz = 0, \\ x - 5y - z - 2z^2 = 0, \\ x + 9y - 3z + 2xz = 0. \end{cases}$$

(z/1-'z/1-'z/1-) : (1-'z/1-'z/1-) : (0'0'0)

67. (МФТИ, 2002)

$$\begin{cases} 3x^3 - 3y^3 + z^3 - xyz - 3 = 0, \\ 3y^3 - x^3 - z^3 - xyz + 5 = 0, \\ x^3 - y^3 + z^3 - xyz - 2 = 0. \end{cases}$$

(z/6'z/6-'z/6'z/6-) : (z/6'z/6-'z/6'z/6-)

68. (МФТИ, 2004)

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 3 + 4z^2, \\ (2z - y)^2 = 4 + x^2, \\ (2z - x)^2 = 2 + y^2. \end{cases}$$

(z/1'z/2-'z/2-) : (z/1'z/2-'z/2-)

69. («Физтех», 2009)

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2) = 5, \\ (y + z)(y^2 + z^2) = 13, \\ (z - x)(x^2 + z^2) = 40. \end{cases}$$

(8'z-'1-)

70. (МФТИ, 1991)

$$\begin{cases} 3xz + 1 = 4x + 3z, \\ 4xy - 3xz = 4y - 3z + 9, \\ xy - zy = x + 3 - 2z. \end{cases}$$

$$\left(\frac{z}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon} \right) ; \left(\frac{z}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon} \right)$$

71. («Высшая проба», 2015, 10) Найдите все тройки действительных чисел x, y, z , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} x^3 y^3 z^3 = 1, \\ xy^5 z^3 = 2, \\ xy^3 z^5 = 3. \end{cases}$$

$$\left(\frac{\frac{9}{\varepsilon^3}}{\varepsilon^3} - \frac{\frac{9}{\varepsilon^3}}{\varepsilon^3} - \frac{\frac{9}{\varepsilon^3}}{\varepsilon^3} \right); \left(\frac{\frac{9}{\varepsilon^3}}{\varepsilon^3} - \frac{\frac{9}{\varepsilon^3}}{\varepsilon^3}, \frac{\frac{9}{\varepsilon^3}}{\varepsilon^3} \right); \left(\frac{\frac{9}{\varepsilon^3}}{\varepsilon^3}, \frac{\frac{9}{\varepsilon^3}}{\varepsilon^3} - \frac{\frac{9}{\varepsilon^3}}{\varepsilon^3} \right); \left(\frac{\frac{9}{\varepsilon^3}}{\varepsilon^3}, \frac{\frac{9}{\varepsilon^3}}{\varepsilon^3}, \frac{\frac{9}{\varepsilon^3}}{\varepsilon^3} \right)$$

72. («Высшая проба», 2017, 8) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \frac{y+z}{2}, \\ \sqrt{y} = \frac{z+x}{2}, \\ \sqrt{z} = \frac{x+y}{2} \end{cases}$$

и доказать, что других решений, кроме найденных, нет.

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right) ; \left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \right)$$