Алгоритмы и операции

1. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 5.3*) Маугли попросил пятерых обезьян принести ему орехов. Обезьяны набрали орехов поровну и понесли Маугли. По дороге они поссорились, и каждая обезьяна бросила в каждую другую по одному ореху. В результате они принесли Маугли вдвое меньше орехов, чем собрали. Сколько орехов получил Маугли? Обязательно объясните свой ответ.

$\boxed{20}$

2. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 5.5*) У продавца есть 3 пачки наклеек по 100 штук в каждой. К нему подошли трое покупателей. Первому покупателю нужно 70 наклеек, а второму и третьему — по 60 наклеек. Как продавцу отсчитать каждому покупателю нужное число наклеек за 70 секунд, если за одну секунду он отсчитывает ровно одну наклейку?

3. (*Всеросс., 2015, МЭ, 5.3*) В семиэтажном доме живут домовые. Лифт курсирует между первым и последним этажами, останавливаясь на каждом этаже. На каждом этаже, начиная с первого, в лифт заходил один домовой, но никто не выходил. Когда в лифт зашёл тысячный домовой, лифт остановился. На каком этаже это произошло? *Ответ объясните.*

$\boxed{\text{На четвёртом}}$

4. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 6.2*) На первой остановке в пустой автобус вошло 18 пассажиров. Потом на каждой остановке выходило 4 человека, а входило 6 человек. Сколько пассажиров ехало в автобусе между четвёртой и пятой остановками?

$\boxed{24}$

5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.4, 7–8.3*) Робот движется по прямолинейным участкам, при этом совершая повороты через каждую минуту на 90 градусов направо или налево (временем на поворот пренебречь). За минуту робот проходит 10 метров. На каком минимальном расстоянии от начального положения он может оказаться через 9 минут после начала движения, если в течение первой минуты робот не поворачивал?

6. (*Математический праздник, 1993, 6.1*) Инопланетянин со звезды Тау Кита, прилетев на Землю в понедельник, воскликнул: «А!». Во вторник он воскликнул: «АУ!», в среду — «АУУА!», в четверг — «АУУАУААУ!». Что он воскликнет в субботу?

7. (*Московская устная олимпиада, 2004, 6.1*) Даны две палочки. Их можно прикладывать друг к другу и делать отметки. Как с помощью этих операций выяснить, что больше — длина более короткой палочки или $2/3$ длины более длинной палочки?

8. (*Московская устная олимпиада, 2002, 6.1*) У первого из десяти друзей есть 5 тугриков, у второго — 10 тугриков, у третьего — 15 тугриков, и т. д., у десятого — 50 тугриков. Они сели на ковёр-самолёт, полёт на котором стоит 5 тугриков с носа. Смогут ли они честно расплатиться с ковром-самолётом, если тот не даёт сдачу и не разменивает деньги?

9. (*Математический праздник, 1994, 6.2*) Найдите в последовательности 2, 6, 12, 20, 30, ... число, стоящее а) на 6-м; б) на 1994-м месте. Ответ объясните.

10. (*Математический праздник, 1998, 6.2*) Три ёжика делили три кусочка сыра массами 5 г, 8 г и 11 г. Лиса стала им помогать. Она может от любых двух кусочков одновременно отрезать и съесть по 1 г сыра. Сможет ли лиса оставить ёжикам равные кусочки сыра?

11. (*Математический праздник, 2014, 6.3*) Одуванчик утром распускается, два дня цветёт жёлтым, на третий день утром становится белым, а к вечеру облетает. Вчера днём на поляне было 20 жёлтых и 14 белых одуванчиков, а сегодня — 15 жёлтых и 11 белых.

а) Сколько жёлтых одуванчиков было на поляне позавчера?

б) Сколько белых одуванчиков будет на поляне завтра?

а) 25; б) 9

12. (*Московская устная олимпиада, 2016, 6.3*) На левом берегу реки собрались 5 физиков и 5 химиков. Всем надо на правый берег. Есть двухместная лодка. На правом берегу ни в какой момент не могут находиться ровно три химика или ровно три физика. Каким образом им всем переправиться, сделав 9 рейсов направо?

13. (*Московская устная олимпиада, 2009, 6.3*) Есть пять батареек, из которых три заряжены, а две разряжены. Фотоаппарат работает от двух заряженных батареек. Покажите, как за четыре попытки можно гарантированно включить фотоаппарат.

14. (*Математический праздник, 2010, 6.4*) В обменном пункте совершаются операции двух типов:

1) дай 2 евро — получи 3 доллара и конфету в подарок;

2) дай 5 долларов — получи 3 евро и конфету в подарок.

Когда богатенький Буратино пришёл в обменник, у него были только доллары. Когда ушёл — долларов стало поменьше, евро так и не появились, зато он получил 50 конфет. Во сколько долларов обошелся Буратино такой «подарок»?

В 10 долларов

15. (*Московская устная олимпиада, 2009, 6.4*) Пончик находится в сломанном луноходе на расстоянии 18 км от Лунной базы, в которой сидит Незнайка. Между ними устойчивая радиосвязь. Запаса воздуха в луноходе хватит на 3 часа, кроме того, у Пончика есть баллон для скафандра, с запасом воздуха на 1 час. У Незнайки есть много баллонов с запасом воздуха на 2 часа каждый. Незнайка не может нести больше двух баллонов одновременно (одним из них он пользуется сам). Скорость передвижения по Луне в скафандре равна 6 км/ч. Сможет ли Незнайка спасти Пончика и не погибнуть сам?

16. (*«Курчатов», 2015, 6.5*) Два мальчика живут в сёлах, между которыми по прямой трассе 90 км, а их тётя — ровно посередине между ними. Тётя пригласила мальчиков в гости. У неё есть мопед, скорость которого 40 км/ч, а с пассажиром — всего 30 км/ч. Все стартуют одновременно: ребята выходят пешком со скоростью 5 км/ч, а тётя выезжает на мопеде, по очереди подбирает мальчиков на трассе и подвозит их. Как им всем собраться у тёти не позднее, чем через 4 часа после старта?

17. (*«Курчатов», 2016, 6.5*) 30 учеников идут парами, в каждой паре ученики разного роста. Докажите, что они могут встать в круг так, чтобы рост каждого отличался от роста его соседей.

18. (*Московская устная олимпиада, 2011, 6.5, 7.4*) Вася выписал все слова (не обязательно осмысленные), которые получаются вычеркиванием ровно двух букв из слова *ИНТЕГРИРОВАНИЕ*, а Маша сделала то же самое со словом *СУПЕРКОМПЬЮТЕР*. У кого получилось больше слов?

19. (*Математический праздник, 1997, 6.6*) Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама — за 2, малыш — за 5, а бабушка — за 10 минут. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Как им перейти мост за 17 минут? (Если переходят двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Двигаться по мосту без фонарика нельзя. Светить издали нельзя. Носить друг друга на руках нельзя.)

20. (*Математический праздник, 2017, 6.6*) Кощей Бессмертный взял в плен 43 человека и увёз их на остров. Отправился Иван-Царевич на двухместной лодке выручать их. А Кощей ему и говорит:

— Надоело мне этих дармоедов кормить, пусть плывут отсюда на твоей лодке подобру-поздорову. Имей в виду: с острова на берег доплыть можно только вдвоём, а обратно и один справится. Перед переправой я скажу каждому не менее чем про 40 других пленников, что это оборотни. Кому про кого скажу, сам выберешь. Если пленник про кого-то слышал, что тот оборотень, он с ним в лодку не сядет, а на берегу находиться сможет. Я заколдую их так, чтобы на суше они молчали, зато в лодке рассказывали друг другу про всех известных им оборотней. Пока хоть один пленник остаётся на острове, тебе с ними плавать нельзя. Лишь когда все 43 окажутся на том берегу, одному из них можно будет за тобой приплыть. А коли не сумеешь устроить им переправу — останешься у меня навсегда.

Есть ли у Ивана способ пройти испытание и вернуться с пленниками домой?

21. (*Московская устная олимпиада, 2014, 6.6*) К кабинке канатной дороги, ведущей на гору, подошли четыре человека, которые весят 50, 60, 70 и 90 кг. Смотрителя нет, а в автоматическом режиме кабинка ездит туда-сюда только с грузом от 100 до 250 кг (в частности, пустой она не ездит), при условии, что пассажиров можно рассадить на две скамьи так, чтобы веса на скамьях отличались не более, чем на 25 кг. Каким образом все они смогут подняться на гору?

22. (*Математический праздник, 1993, 6.7*) Али-Баба стоит с большим мешком монет в углу пустой прямоугольной пещеры размером $m \times n$ клеток, раскрашенных в шахматном порядке. Из любой клетки он может сделать шаг в любую из четырёх соседних клеток (вверх, вниз, вправо или влево). При этом он должен либо положить 1 монету в этой клетке, либо забрать из неё 1 монету, если, конечно, она не пуста. Может ли после прогулки Али-Бабы по пещере оказаться, что на чёрных клетках лежит ровно по 1 монете, а на белых монет нет?

23. (*Московская устная олимпиада, 2003, 6.7*) По кругу стоят восемь козлов разного роста. Любой из них умеет перепрыгивать через двух соседних козлов против часовой стрелки. Докажите, что при любом начальном расположении козлов они смогут встать по росту.

24. (*Математический праздник, 2010, 7.1*) У Юры есть калькулятор, который позволяет умножать число на 3, прибавлять к числу 3 или (если число делится на 3 нацело) делить на 3. Как на этом калькуляторе получить из числа 1 число 11?

25. (*Математический праздник, 2014, 7.4*) Одуванчик утром распускается, три дня цветёт жёлтым, на четвёртый день утром становится белым, а к вечеру пятого дня облетает. В понедельник днём на поляне было 20 жёлтых и 14 белых одуванчиков, а в среду — 15 жёлтых и 11 белых. Сколько белых одуванчиков будет на поляне в субботу?

$\boxed{9}$

26. (*Математический праздник, 1990, 6–7.4*) Поставьте в ряд а) 5 простых чисел; б) 6 простых чисел так, чтобы разности соседних чисел в каждом ряду были равны.

27. (*Московская устная олимпиада, 2008, 7.4*) В клубе встретились двадцать джентльменов. Некоторые из них были в шляпах, а некоторые — без шляп. Время от времени один из джентльменов снимал с себя шляпу и надевал её на одного из тех, у кого в этот момент шляпы не было. В конце десять джентльменов подсчитали, что каждый из них отдавал шляпу большее количество раз, чем получал. Сколько джентльменов пришли в клуб в шляпах?

28. (*Турнир Архимеда, 2017.4*) На Новогоднем базаре продаются гирлянды из шариков. В каждой гирлянде 201 шарик: некоторые — красные, остальные — зелёные. Шарики волшебные — по команде Дежурного Снеговика они могут менять цвет: красные становятся зелёными, а зелёные — красными. За один раз он может поменять цвет каких-нибудь двух, трёх или четырёх шариков, расположенных подряд. За каждое перекрашивание Снеговик берет 1 копейку. Федя утверждает, что рубля ему заведомо хватит на то, чтобы превратить любую гирлянду в одноцветную. Прав ли Федя?

29. (*Всеросс., 2017, МЭ, 7.5*) Вдоль прямолинейного участка границы установлено 15 столбов. Около каждого столба поймали нескольких близоруких шпионов. Каждый из них честно сказал, сколько других шпионов он видел. Но любой шпион видел только тех, кто находился около его столба и около ближайших соседних столбов. Можно ли по этим данным восстановить численность шпионов, пойманных около каждого столба?

30. (*Математический праздник, 2015, 7.5*) Имеется набор из двух карточек: $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$. За одну операцию разрешается составить выражение, использующее числа на карточках, арифметические действия, скобки. Если его значение — целое неотрицательное число, то его выдают на новой карточке. (Например, имея карточки $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ и $\boxed{7}$, можно составить выражение $\boxed{7}\boxed{5}/\boxed{3}$ и получить карточку $\boxed{25}$ или составить выражение $\boxed{3}\boxed{5}$ и получить карточку $\boxed{35}$.)

Как получить карточку с числом 2015

а) за 4 операции;

б) за 3 операции?

31. (*«Высшая проба», 2016, 7–8.5*) На доске написаны числа 1, 1/2, 1/3, …, 1/100. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них $a+b+ab$. После нескольких таких операций на доске осталось одно число. Чему оно может быть равно?

$\boxed{100}$

32. (*«Курчатов», 2016, 7.5*) На олимпиаду пришли 300 семиклассников из 4 школ. Докажите, что их можно разбить на команды по 3 человека в каждой так, чтобы в каждой команде либо все три ученика были из одной школы, либо все три — из разных школ.

33. (*Математический праздник, 1991, 7.5*) Даны две последовательности:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 14,\ 10,\ 2 \quad \text{и} \quad 3,\ 6,\ 12.$$

В каждой из них каждое число получено из предыдущего по одному и тому же закону.

а) Найдите этот закон.

б) Найдите все натуральные числа, переходящие сами в себя (по этому закону).

в) Докажите, что число 2^{1991} после нескольких переходов станет однозначным.

34. (*Московская устная олимпиада, 2006, 7.5*) На бесконечном листе клетчатой бумаги x клеток покрашены в чёрный цвет. Каждую секунду все белые клетки, у которых хотя бы три соседа из четырёх чёрные, становятся чёрными, а все клетки, у которых хотя бы три соседа из четырёх белые, становятся белыми. Остальные клетки не меняются. Может ли через несколько секунд случиться так, что на листе бумаги окажется ровно $\frac{3}{2}x$ чёрных клеток?

35. (*Московская устная олимпиада, 2005, 7.6*) На столе лежит стопка карт «рубашкой» вверх. Требуется переложить их в обратном порядке (и снова «рубашкой» вверх), применив несколько раз такую операцию: из любого места стопки вынимаются две соседние карты, переворачиваются как единое целое и кладутся на прежнее место. При каком количестве карт в стопке это можно сделать?

36. (*Московская устная олимпиада, 2012, 7.7*) На складах двух магазинов хранится пшено: на первом складе на 16 тонн больше, чем на втором. Каждую ночь ровно в полночь владелец каждого магазина ворует у своего конкурента четверть имеющегося на его складе пшена и перетаскивает на свой склад. Через 10 ночей воришек поймали. На каком складе в момент их поимки было больше пшена и на сколько?

37. (*Московская устная олимпиада, 2003, 7.7*) Восемь томов «Энциклопедии Козлов» сложили в стопку. Разрешается вынимать из стопки либо третью сверху книгу, либо самую нижнюю, и класть её наверх. Докажите, что независимо от начального расположения томов их можно сложить по порядку номеров.

38. (*Московская устная олимпиада, 2002, 7.7*) Робинзон Крузо поручил Пятнице провести перепись собак, кошек, коз и попугаев. Пятница решил отмечать каждую собаку палочкой, кошку — палочкой и ноликом, козу — двумя ноликами. Сможет ли Пятница отметить каждого попугая какой-нибудь последовательностью из палочек и ноликов, чтобы по его отчёту (Пятница пишет слева направо подряд без пробелов) Робинзон мог однозначно установить, сколько каких животных приняли участие в переписи?