Алгебраические преобразования

1. (*Всеросс., 2014, I этап, 8*) Замените в выражении $(x^3-2)^2+(x^2+*)^2$ звёздочку $(*)$ на одночлен так, чтобы после возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых получилось четыре слагаемых.

2. (*Всеросс., 2016, I этап, 8*) Разность квадратов двух чисел равна 6, а если уменьшить каждое из этих чисел на 2, то разность их квадратов станет равна 18. Чему равна сумма этих чисел?

$\boxed{-2}$

3. (*ОММО, 2016, 9–10*) Про действительные числа x, y, z известно, что

$$xy+z=yz+x=zx+y.$$

Докажите, что какие-то два из чисел x, y, z равны.

4. (*ОММО, 2016, 11*) Представьте в виде несократимой дроби

$$7\frac{19}{2015}\times 6\frac{19}{2016}-13\frac{1996}{2015}\times 2\frac{1997}{2016}-9\times\frac{19}{2015}\,.$$

$\boxed{19/96}$

5. (*Всеросс., 2016, I этап, 9*) На доске была написана несократимая дробь. Петя уменьшил её числитель на 1, а знаменатель на 2. А Вася прибавил к числителю 1, а знаменатель оставил без изменений. Оказалось, что в результате мальчики получили одинаковые значения. Какой именно результат у них мог получиться?

$\boxed{1}$

6. (*Всеросс., 2014, I этап, 9*) Замените в выражении $(x^4-3)^2+(x^3+*)^2$ звёздочку $(*)$ на одночлен так, чтобы после возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых получилось четыре слагаемых.

7. (*Всеросс., 2014, II этап, 8*) Про различные числа a и b известно, что

$$\frac{a}{b}+a=\frac{b}{a}+b.$$

Найдите $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

$\boxed{-1}$

8. (*Всеросс., 2016, II этап, 9*) Известно, что $a^2+b=b^2+c=c^2+a$. Какие значения может принимать выражение

$$a(a^2-b^2)+b(b^2-c^2)+c(c^2-a^2)\,?$$

$\boxed{0}$

9. (*«Ломоносов», 2014, 7–8*) Незнайка придумал фантастическое умножение $\circledast$, которое для любых x и y удовлетворяет аксиомам нуликативности:

$$x \circledast x = 0$$

и тилимилитивности:

$$x \circledast (y \circledast z) = (x \circledast y) + z.$$

Помогите Знайке вычислить $1755 \circledast 2014$.

$\boxed{-259}$

10. (*«Высшая проба», 2015, 8–9*) Числа x и y таковы, что $x + y = xy = 17$. Найти значение выражения

$$(x^2 - 17x)\left(y + \frac{17}{y}\right).$$

$\boxed{-289}$

11. (*«Ломоносов», 2013, 9*) Доказать, что если числа x, y и z — целые, то число

$$\frac{1}{2}\left((x-y)^4 + (y-z)^4 + (z-x)^4\right)$$

является квадратом некоторого целого числа.

12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11*) Найдите значение выражения

$$\left(\frac{3}{2x-y} - \frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-5y}\right) : \frac{y^2}{4x^2-y^2}$$

при $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{7}{3}$.

$\boxed{\frac{3}{8}}$

13. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Сравните число

$$\sqrt{\left|8\sqrt{3} - 16\right|} - \sqrt{8\sqrt{3} + 16}$$

и наименьший корень уравнения $4x^2 + 21x + 17 = 0$.

$\boxed{\text{Число больше корня}}$

14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Можно ли представить выражение

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - (ax + bz)^2 - (by - cx)^2 - (cz + ay)^2$$

в виде квадрата некоторого многочлена от переменных a, b, c, x, y, z?

$\boxed{\text{Да}}$

15. (*«Высшая проба», 2015, 11*) Действительные числа x, y, z выбираются так, что выполняются равенства $xy+yz+zx=4$, $xyz=6$. Доказать, что при любом таком выборе значение выражения

$$\left(xy-\frac{3}{2}(x+y)\right)\left(yz-\frac{3}{2}(y+z)\right)\left(zx-\frac{3}{2}(z+x)\right)$$

является одним и тем же числом, и найти это число.

$\boxed{\frac{4}{81}}$

16. (*«Ломоносов», 2005*) Вычислите

$$\frac{2xy(x^3+y^3)}{x^2-xy+y^2}+\frac{(x+y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2}$$

при $x=-1,\underbrace{6\ldots6}_{44}7$ и $y=-1,\underbrace{3\ldots3}_{45}$.

$\boxed{-27}$

17. (*«Ломоносов», 2008*) Найдите k, если

$$4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2k-\sqrt{3}}}}=2-\sqrt{3}.$$

$\boxed{1}$

18. (*Всеросс., 2015, финал, 10*) Назовём натуральное число *почти квадратом*, если оно равно произведению двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что каждый почти квадрат можно представить в виде частного двух почти квадратов.

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

16.3.6. Найдите все натуральные числа, которые можно представить в виде

$$\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}\,,$$

где x, y и z — три различных натуральных числа.

15.3.1. На доске написаны четыре числа, ни одно из которых не равно 0. Если каждое из них умножить на сумму трёх остальных, получатся четыре одинаковых результата. Докажите, что квадраты записанных на доске чисел равны.

13.3.4. Существуют ли шесть различных натуральных чисел a, b, c, d, e, f таких, что справедливо равенство

$$(a+b+c+d+e+f):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}\right)=2012\,?$$

12.4.6. Существуют ли такие различные натуральные числа a, b и c, что число $a + \frac{1}{a}$ равно полусумме чисел $b + \frac{1}{b}$ и $c + \frac{1}{c}$?

11.3.2. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Докажите, что какие-то два из исходных чисел совпадают.

11.4.1. Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ найдутся такие натуральные числа a, b, c, d, что $a + b = c + d = ab - cd = 4n$.

10.4.7. Докажите, что для произвольных a, b, c равенство

$$\frac{a(b-c)}{b+c} + \frac{b(c-a)}{c+a} + \frac{c(a-b)}{a+b} = 0$$

выполнено тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\frac{a^2(b-c)}{b+c} + \frac{b^2(c-a)}{c+a} + \frac{c^2(a-b)}{a+b} = 0.$$

09.3.6. В трёх клетках клетчатого листа записаны числа, а остальные клетки пусты. Разрешается выбрать два числа из разных непустых клеток и записать в пустую клетку их сумму; также можно выбрать числа a, b, c из трёх разных непустых клеток и записать в пустую клетку число $ab + c^2$. Докажите, что при помощи нескольких таких операций можно записать в одну из клеток квадрат суммы трёх исходных чисел (какими бы они ни были).

09.4.2. При всяком ли натуральном n, большем 2009, из дробей $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n-1}$, $\frac{3}{n-2}$, $\ldots$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n}{1}$ можно выбрать две пары дробей с одинаковыми суммами?