Четыре точки на окружности

Три точки, не лежащие на одной прямой, всегда лежат на одной окружности (так как около любого треугольника можно описать окружность). А вот четыре точки в общем положении уже не обязаны располагаться на одной окружности. Если в сложной геометрической задаче удаётся установить, что какие-то четыре точки лежат на одной окружности, то это зачастую оказывается существенным продвижением к решению. Поэтому нужно свободно владеть свойствами и признаками расположения четырёх точек на окружности.

Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$. Для того, чтобы его вершины были расположены на одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих равенств:

(1) $\angle ABD = \angle ACD$;
(2) $\angle A + \angle C = 180°$;
(3) $KA \cdot KC = KB \cdot KD$, где K — точка пересечения диагоналей;
(4) $MA \cdot MB = MD \cdot MC$, где M — точка пересечения прямых AB и CD.

Задача 1. Докажите достаточность равенств (1) и (4).

Задача 2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 8–9*) Петя хотел нарисовать правильный треугольник ABC. Но, поскольку он рисовал неточно, получился треугольник с углами $\angle A = 59°$ и $\angle B = 63°$. Потом Петя провёл высоты CE и BD, но, поскольку угольник был слегка перекошен, получил углы $\angle ADB = \angle AEC = 92°$. Найдите градусную меру угла AED.

$\boxed{58°}$

Задача 3. (*«Высшая проба», 2018, 7–8.4*) Пусть дан четырехугольник $ACDE$, такой что вершины D и E лежат по одну сторону от прямой AC. Пусть на стороне AC взята точка B, так что треугольник BCD — равнобедренный с основанием BC, т. е. $BD = CD$. Пусть углы BDC, ABE, ADE равны 80 градусов. Найдите угол EAD.

$\boxed{50°}$

Задача 4. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2012, 8–9*) В трапеции $ABCD$ стороны AD и BC параллельны, и $AB = BC = BD$. Высота BK пересекает диагональ AC в точке M. Найдите $\angle CDM$.

$\boxed{90°}$

Задача 5. (*Олимпиада Эйлера и Всеросс., 2018, РЭ, 8.4, 9.3*) Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90°$. Точка M — середина отрезка BC. Найдите угол DME.

Задача 6. (*Первая лемма о воробьях*[1]) Точка W — середина дуги ACB описанной окружности треугольника ABC. Точки X и Y одновременно поехали из вершин A и B вдоль прямых AC и BC соответственно, и двигаются они *в одну сторону* (либо к точке C, либо от неё). Докажите, что точки W, C, X, Y лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда скорости поехавших точек равны.

[1] Такое название прижилось после статьи А. Полянского «Воробьями по пушкам!» («Квант», 2012, №2).

Задача 7. (*Вторая лемма о воробьях*) Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC и AC в точках A_0 и B_0 соответственно. Точки X и Y одновременно поехали из точек A_0 и B_0 вдоль прямых BC и AC соответственно, и двигаются они *в разные стороны* (одна — к точке C, другая — от неё). Докажите, что точки C, X, Y, I (центр вписанной окружности) лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда скорости поехавших точек равны.

Задача 8. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2006, 8–9*) Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что касательная в точке K к окружности, описанной около треугольника ABK, параллельна CD.

Задача 9. (*Всеросс., 2014, МЭ, 10*) Точка F — середина стороны BC квадрата $ABCD$. К отрезку DF проведён перпендикуляр AE. Найдите угол CEF.

Задача 10. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2012, 8–9*) В трапеции $ABCD$ стороны AD и BC параллельны, и $AB = BC = BD$. Высота BK пересекает диагональ AC в точке M. Найдите $\angle CDM$.

Задача 11. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2011, 8–9*) В трапеции $ABCD$ известно, что $AB = BC = CD$, CH — высота. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из H на AC, проходит через середину BD.

Задача 12. (*ММО, 2012, 8.4, 9.3*) В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD. На отрезке BH отметили точку M, равноудалённую от точек C и D. Пусть K — середина стороны AB. Докажите, что угол MKD прямой.

Задача 13. (*ММО, 2016, 9.4*) Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая, перпендикулярная стороне AC, пересекает сторону BC и прямую AB в точках Q и P соответственно. Докажите, что точки B, O и середины отрезков AP и CQ лежат на одной окружности.

Задача 14. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) В треугольнике ABC медианы AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в точке M. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников MA_0B_0, MCB_0, MA_0C_0, MBC_0 и точка M лежат на одной окружности.

Задача 15. (*«Курчатов», 2018, 10.5*) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно. Точка I_A — центр вневписанной со стороны BC окружности треугольника ABC, а точки K и L — середины отрезков DI_A и EI_A соответственно. Прямые BK и CL пересекаются в точке F, лежащей внутри угла BAC. Найдите $\angle BFC$, если $\angle BAC = 50°$. (*Вневписанная окружность* касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC за точки B и C соответственно.)

$\boxed{130°}$

Задача 16. (*ММО, 2018, 10.3*) Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC, AH — его высота. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CO. Докажите, что прямая HP проходит через середину отрезка AB.

Задача 17. (*ММО, 2015, 11.3*) На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли произвольную точку X, а на боковых сторонах — точки P и Q так, что $XPBQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно PQ, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Задача 18. (*Всеросс., 2014, РЭ, 9.7*) Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что точки B, D, а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC?

Задача 19. (*Всеросс., 2012, РЭ, 10.2*) Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle FAE = \angle BDC$, а четырёхугольники $ABDF$ и $ACDE$ являются вписанными. Докажите, что прямые BF и CE параллельны.

Задача 20. (*Всеросс., 2011, финал, 9.2*) Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность, проходящая через вершину B и центр O его описанной окружности, вторично пересекает стороны BC и BA в точках P и Q соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника POQ лежит на прямой AC.

Задача 21. (*Всеросс., 2014, финал, 9.2*) Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана в окружность Ω. Окружность ω проходит через точки C, D и пересекает отрезки CA, CB в точках A_1, B_1 соответственно. Точки A_2 и B_2 симметричны точкам A_1 и B_1 относительно середин отрезков CA и CB соответственно. Докажите, что точки A, B, A_2 и B_2 лежат на одной окружности.

Задача 22. (*Всеросс., 2016, финал, 9.2*) Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q. Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

Задача 23. (*Всеросс., 2012, финал, 9.3*) Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом A. Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на BC. Продолжение медианы треугольника ABC, проведённой из вершины C, пересекает описанную около него окружность в точке K. Докажите, что точки K, H, C и D лежат на одной окружности.

Задача 24. (*Всеросс., 2018, финал, 10.2*) Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно, а D — основание высоты, проведённой из A. На отрезке MN нашлась точка K такая, что $BK = CK$. Луч KD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точке Q. Докажите, что точки C, N, K и Q лежат на одной окружности.

Задача 25. (*Всеросс., 2014, финал, 9.4*) Точка M — середина стороны AC остроугольного треугольника ABC, в котором $AB > BC$. Окружность Ω описана около треугольника ABC. Касательные к Ω, проведённые в точках A и C, пересекаются в точке P. Отрезки BP и AC пересекаются в точке S. Пусть AD — высота треугольника ABP. Окружность ω, описанная около треугольника CSD, пересекает окружность Ω в точке $K \neq C$. Докажите, что $\angle CKM = 90°$.

Задача 26. (*Турнир городов, 2015, 8–11*) Внутри окружности расположен равносторонний N-угольник. Каждую его сторону продлевают в обе стороны до пересечения с окружностью, получая по два новых отрезка, расположенных вне многоугольника. Затем некоторые из $2N$ полученных отрезков красятся в красный цвет, а остальные — в синий цвет. Докажите, что можно раскрасить эти отрезки так, чтобы сумма длин красных отрезков равнялась сумме длин синих.