Векторы в физике

Содержание

Векторы — мощный инструмент математики и физики. На языке векторов формулируются основные законы механики и электродинамики. Чтобы понимать физику, нужно научиться работать с векторами.

Это небольшое пособие предназначено для школьников, желающих хорошо разбираться в физике. К данному тексту полезно будет вернуться на первом курсе при изучении аналитической геометрии и линейной алгебры — чтобы осознать, например, откуда берутся аксиомы линейного и евклидова пространства.

1 Скалярные и векторные величины

В процессе изучения физики мы встречаем два типа величин — скалярные и векторные.

Определение. *Скалярная величина, или скаляр — это физическая величина, для задания которой (в подходящих единицах измерения) достаточно одного числа.*

Скаляров очень много в физике. Масса тела равна 3 кг, температура воздуха равна $-10°$C, напряжение в сети равно 220 В... Во всех этих случаях интересующая нас величина задаётся одним-единственным числом. Следовательно, масса, температура и электрическое напряжение являются скалярами.

Но скаляр в физике — это не просто число. *Скаляр есть число, снабжённое размерностью*[1]. Так, задавая массу, мы не можем написать $m = 3$; надо указать единицу измерения — например, $m = 3$ кг. И если в математике мы можем сложить числа 3 и 220, то в физике сложить 3 килограмма и 220 вольт не получится: мы имеем право складывать лишь те скаляры, которые обладают одинаковой размерностью (массу с массой, напряжение с напряжением и т. д.).

Определение. *Векторная величина, или вектор — это физическая величина, характеризуемая: 1) неотрицательным скаляром; 2) направлением в пространстве. При этом скаляр называется модулем вектора, или его абсолютной величиной.*

Предположим, что автомобиль движется со скоростью 60 км/ч. Но ведь это неполная информация о движении, не так ли? Может оказаться важным и то, *куда* едет автомобиль, в каком именно *направлении*. Поэтому важно знать не только модуль (абсолютную величину) скорости автомобиля — в данном случае это 60 км/ч — но и её направление в пространстве. Значит, скорость является вектором.

Другой пример. Допустим, на полу лежит кирпич массой 1 кг. На кирпич действует сила 100 Н (это модуль силы, или её абсолютная величина). Как будет двигаться кирпич? Вопрос лишён смысла до тех пор, пока не указано направление действия силы. Если сила действует вверх, то и кирпич будет двигаться вверх. Если сила действует горизонтально, то и кирпич поедет горизонтально. А если сила действует вертикально вниз, то кирпич вообще не сдвинется с места — он будет только вжиматься в пол. Мы видим, таким образом, что сила также является вектором.

Векторная величина в физике также обладает размерностью. *Размерность вектора — это размерность его модуля.*

Мы будем обозначать векторы буквами со стрелкой. Так, вектор скорости можно обозначить через $\vec{v}$, а вектор силы — через $\vec{F}$. Собственно, *вектор — это и есть стрелка* или, как ещё говорят, *направленный отрезок* (рис. 1).

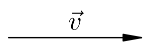

Рис. 1. Вектор $\vec{v}$

Начальная точка стрелки называется *началом* вектора, а конечная точка (остриё) стрелки — *концом* вектора. В математике вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается также $\overrightarrow{AB}$; нам такое обозначение тоже иногда понадобится.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* вектором (или *нулём*) и обозначается $\vec{0}$. Нулевой вектор есть попросту точка; он не имеет определённого направления. Длина нулевого вектора, разумеется, равна нулю.

[1]Попадаются и безразмерные скаляры: коэффициент трения, коэффициент полезного действия, показатель преломления среды... Так, показатель преломления воды равен 1,33 — это исчерпывающая информация, никакой размерностью данное число не обладает.

Рисование стрелок полностью решает задачу графического представления векторных величин. *Направление стрелки указывает направление данного вектора, а длина стрелки в подходящем масштабе есть модуль этого вектора.*

Предположим, например, что два автомобиля двигаются навстречу друг другу со скоростями $u = 30$ км/ч и $v = 60$ км/ч. Тогда векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ скоростей автомобилей будут иметь противоположные направления, причём длина вектора $\vec{v}$ в два раза больше (рис. 2).

Рис. 2. Вектор $\vec{v}$ вдвое длиннее

Как вы уже поняли, буква без стрелки (например, u или v в предыдущем абзаце) обозначает модуль соответствующего вектора. В математике модуль вектора $\vec{v}$ обычно обозначается $|\vec{v}|$, но физики, если ситуация позволяет, предпочтут именно v — букву без стрелки.

Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых.

Пусть имеются два коллинеарных вектора. Если их направления совпадают, то векторы называются *сонаправленными*; если же их направления различны, то векторы называются *противоположно направленными*. Так, выше на рис. 2 векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ являются противоположно направленными.

Два вектора называются *равными*, если они сонаправлены и имеют равные модули (рис. 3).

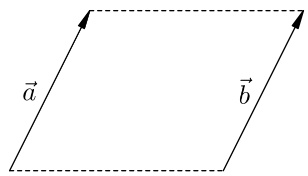

Рис. 3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны: $\vec{a} = \vec{b}$

Таким образом, равенство векторов отнюдь не означает непременного совпадения их начал и концов: *мы можем переносить вектор параллельно самому себе, и при этом получится вектор, равный исходному.* Такой перенос постоянно применяется в тех случаях, когда желательно свести начала векторов в одну точку — например, при нахождении суммы или разности векторов. К рассмотрению операций над векторами мы и переходим.

2 Сложение векторов

В физике можно складывать только векторы, обладающие одинаковой размерностью. Мы можем складывать скорость со скоростью, силу с силой, но не имеем права сложить вектор скорости с вектором силы.

Правила сложения векторов можно объяснить на двух характерных примерах: сложении перемещений и сложении сил.

2.1 Правило треугольника

Начнём с перемещений. *Перемещением* называется вектор, соединяющий начальное и конечное положения тела.

Если, например, тело находилось в точке A и после этого оказалось в точке B, то перемещением тела будет вектор $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$. Перемещение тела не зависит от формы траектории; оно определяется лишь начальной и конечной точками движения. На рис. 4 изображено перемещение тела $\vec{s}$ и для сравнения пунктиром показана траектория тела.

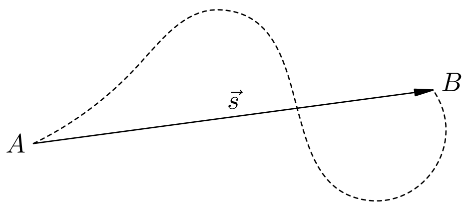

Рис. 4. Вектор перемещения

Предположим, что тело совершило перемещение $\vec{s}_1$ из точки A в точку B, а затем — перемещение $\vec{s}_2$ из точки B в точку C (рис. 5). Итоговое перемещение есть вектор $\vec{s}$, соединяющий начальную точку A с конечной точкой C.

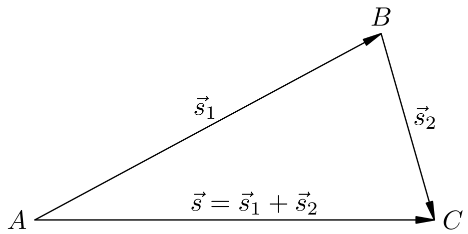

Рис. 5. Сложение перемещений

Перемещение $\vec{s}$ есть результат двух последовательно совершённых перемещений $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$, и поэтому естественно считать, что оно является их суммой: $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$. Это приводит нас к *правилу треугольника* для сложения произвольных векторов (рис. 6).

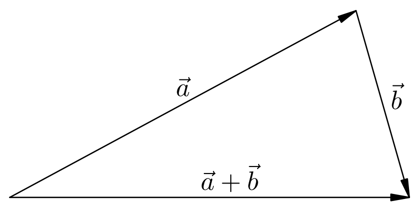

Рис. 6. Правило треугольника

Правило треугольника. *Поместим начало вектора $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{a}$. Тогда вектор $\vec{a} + \vec{b}$ соединяет начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{b}$.*

2.2 Правило параллелограмма

Несколько иная картина возникает при сложении сил. Допустим, что в точке O находится небольшое тело и к нему приложены две силы: $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.

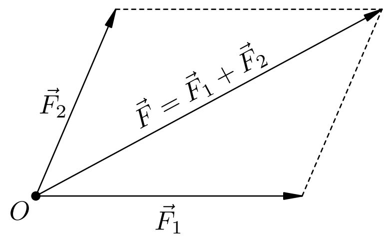

Рис. 7. Сложение сил

Опыт показывает, что совместное действие этих сил равноценно действию *одной* силы $\vec{F}$, которая служит диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 7).

Иными словами, движение нашего тела не претерпит никаких изменений, если убрать силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ и заменить их силой $\vec{F}$. Эта сила $\vec{F}$ называется *равнодействующей* (или *результирующей*) двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$; она является результатом их совместного применения, и потому естественно считать, что она будет их суммой: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Данное соображение приводит нас к *правилу параллелограмма* для сложения двух произвольных векторов (рис. 8).

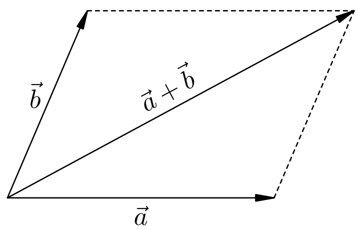

Рис. 8. Правило параллелограмма

Правило параллелограмма. *Поместим начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в одну точку. Тогда вектор $\vec{a} + \vec{b}$, имея начало в той же точке, является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.*

Итак, имеются два естественных способа складывать векторы: правило треугольника и правило параллелограмма. Если бы эти правила приводили к разным результатам, было бы очень скверно. Но, к счастью, результат получается один и тот же!

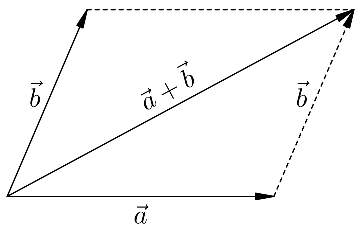

Рис. 9. Правило треугольника = Правило параллелограмма

Посмотрите на рис. 9. Сначала мы сложили векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по правилу параллелограмма. Затем перенесли вектор $\vec{b}$ параллельно самому себе так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$ (перенесённый вектор $\vec{b}$ изображён на рисунке пунктиром). Тем самым возникла возможность сложить наши векторы по правилу треугольника, и в результате мы получаем тот же суммарный вектор $\vec{a}+\vec{b}$, что и в первом случае — а именно, диагональ параллелограмма.

Таким образом, правила треугольника и параллелограмма легко сводятся друг к другу, и между ними нет никакой разницы. В физике мы чаще пользуемся правилом параллелограмма (складывая силы, скорости, ускорения, напряжённости поля и т. п.), поскольку складываемые векторы обычно приложены в одной точке.

Единственная загвоздка с нашими правилами состоит в том, что при сложении *коллинеарных* векторов не возникает ни треугольника, ни параллелограмма. Но правило треугольника — в том виде, как оно было сформулировано — продолжает работать (рис. 10).

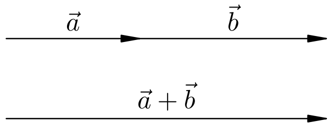

Рис. 10. Сложение коллинеарных векторов

А именно, мы помещаем начало вектора $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{a}$ и соединяем начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{b}$. Получится вектор $\vec{a}+\vec{b}$, который на рисунке расположен ниже.

2.3 Свойства сложения векторов

Операция сложения векторов обладает всеми хорошими алгебраическими свойствами, которые присущи сложению чисел и привычны для нас.

1. От перестановки слагаемых сумма не меняется (математики называют это *коммутативностью* сложения):
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}. \tag{1}$$
Это легко следует из правила параллелограмма (рис. 8). Действительно, какая разница, в каком порядке суммировать векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если диагональ параллелограмма всё равно одна и та же?

2. Возникает интересный вопрос: а как сложить *три* вектора? Можно ли определить сумму $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$? Давайте сделаем это двумя способами: найдём векторы $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ и $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, а затем сравним результаты.

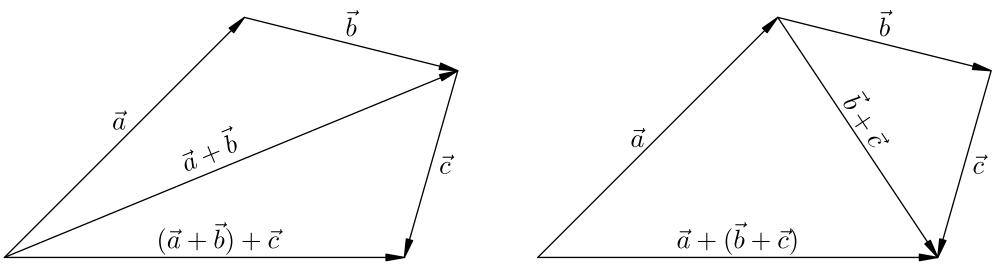

Рис. 11. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

Как мы видим из рис. 11, результаты совпадают! Имеем следующий закон (математики называют его *ассоциативностью*):

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}). \tag{2}$$

Вместе с коммутативностью (1) это означает, что сумма $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ корректно определена: мы можем складывать данные векторы, комбинируя их как угодно, и результат всегда будет получаться одним и тем же. Например, можно найти нашу сумму так (рис. 12):

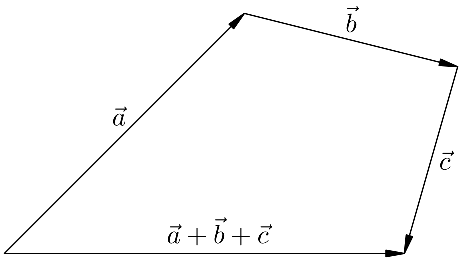

Рис. 12. Сумма трёх векторов

Вообще, можно показать, что сумма любого конечного числа векторов не зависит от того, в каком порядке мы складываем векторы. Например, для нахождения суммарного вектора можно воспользоваться *правилом многоугольника* (рис. 13; пример для пяти векторов):

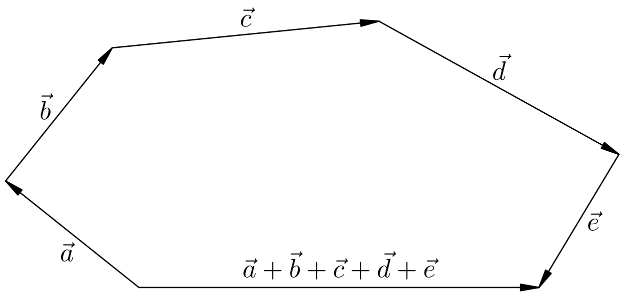

Рис. 13. Правило многоугольника

В физических задачах бывает важно углядеть, каким именно образом лучше просуммировать векторы. Вот стандартная ситуация. Пусть длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ равны 1, длина вектора $\vec{b}$ равна 2; угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°, угол между $\vec{b}$ и $\vec{c}$ тоже равен 60° (рис. 14). Требуется найти длину вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

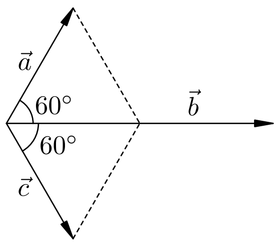

Рис. 14. Найти длину вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Искать сначала сумму $\vec{a}+\vec{b}$ и прибавлять потом к ней $\vec{c}$ — можно, но это не самая лучшая идея. Давайте начнём с того, что сложим $\vec{a}$ и $\vec{c}$! Доведите сами до конца это решение, осталось совсем немного. Ответ: 3.

3. Прибавление к вектору нулевого вектора ничего не меняет:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}. \tag{3}$$

Это совершенно очевидно, если представить себе такое сложение с точки зрения правила треугольника.

4. Для каждого вектора $\vec{a}$ существует *противоположный* вектор, обозначаемый $-\vec{a}$; сумма вектора и его противоположного равна нулю:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}. \tag{4}$$

Противоположный вектор $-\vec{a}$ равен по длине вектору $\vec{a}$ и противоположен ему по направлению (рис. 15).

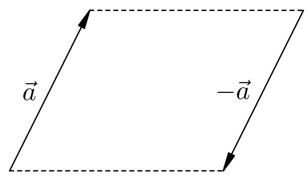

Рис. 15. Противоположный вектор

Понятие противоположного вектора вплотную подводит нас к операции вычитания векторов. Эта операция настолько важна в физике, что мы обсудим её отдельно.

2.4 Вычитание векторов

Вычитание вектора — это прибавление противоположного вектора. Иными словами, *разностью векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется сумма* $\vec{a} + (-\vec{b})$.

Такое формальное определение не слишком годится для нас. Мы подойдём к вычитанию векторов с несколько иной стороны.

Рассмотрим три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ такие, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ (рис. 16).

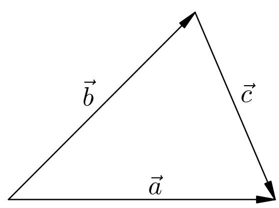

Рис. 16. К определению разности векторов

Хорошо было бы перенести вектор $\vec{b}$ вправо со знаком минус, написав $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, и сказать при этом, что вектор $\vec{c}$ есть *разность* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Так и делают! Рисунок 17 дублирует рис. 16 — с тем лишь отличием, что вместо $\vec{c}$ стоит $\vec{a} - \vec{b}$.

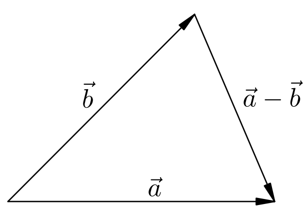

Рис. 17. Разность векторов

Давайте будем считать рис. 17 определением разности векторов. Итак, чтобы найти векторную разность $\vec{a} - \vec{b}$, мы последовательно делаем следующие шаги.

1. Если начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находятся в разных точках, то приводим эти векторы к одному началу, параллельно перенося один из векторов.

2. Соединяем концы векторов и «укалываем» тот вектор, *из которого производится вычитание*[2]. В данном случае стрелка направляется к вектору $\vec{a}$.

Разумеется, наглядное определение с помощью рис. 17 даёт в результате тот же самый вектор, что и упомянутое выше формальное определение разности $\vec{a}-\vec{b}$ как суммы $\vec{a}+(-\vec{b})$. Попробуйте сами понять, почему так получается!

Разность векторов в физике встречается часто, особенно в механике. Например, ускорение определяется следующим образом:

$$\vec{a}=\frac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t}\,.$$

Здесь $\vec{v}_0$ — начальная скорость тела, $\vec{v}$ — конечная скорость, t — время, за которое скорость изменилась от $\vec{v}_0$ до $\vec{v}$. Разность $\Delta\vec{v}=\vec{v}-\vec{v}_0$ называется *изменением скорости*[3].

Таким образом, ускорение есть изменение скорости, делённое на время, за которое это изменение произошло. Об умножении (и тем самым о делении) вектора на скаляр мы поговорим чуть ниже, а пока давайте разберём несложную задачу.

Задача. Тело движется по окружности со скоростью v. Найти модуль изменения скорости тела за четверть периода.

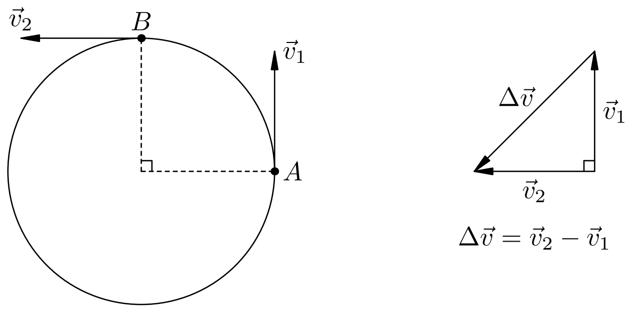

Рис. 18. К задаче про изменение скорости

Решение. Пусть в некоторой точке A окружности скорость тела равна $\vec{v}_1$. За четверть периода тело пройдёт четверть окружности и окажется в точке B; пусть скорость тела в этой точке равна $\vec{v}_2$ (рис. 18).

Конечно, $|\vec{v}_1|=|\vec{v}_2|=v$, но $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ — *разные* векторы (их направления различны), и потому изменение скорости не равно нулю. Смотрим на равнобедренный прямоугольный треугольник, изображённый на рис. 18 справа, и по теореме Пифагора заключаем, что $|\Delta\vec{v}|=v\sqrt{2}$.

[2]Можно запомнить это как *правило УУ* — «Уколоть Уменьшаемое».

[3]Вообще, *изменение* какой-либо физической величины — это всегда разность её конечного и начального значений.

3 Умножение скаляра на вектор

Векторы можно не только складывать друг с другом, но и умножать на скаляры. Между выражениями «умножение скаляра на вектор» и «умножение вектора на скаляр» никакой принципиальной разницы нет.

При умножении скаляра на вектор получается вектор. Размерность вектора-произведения равна произведению размерностей скаляра и исходного вектора.

Перемножение скаляра и вектора встречается в физике везде, где фигурируют сами векторы. Например, при движении с постоянной скоростью $\vec{v}$ перемещение тела за время t выражается формулой:

$$\vec{s} = \vec{v}t.$$

Импульс тела определяется как произведение массы на скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Кстати, импульс не обладает собственной единицей измерения. Размерность импульса есть просто произведение размерностей массы и скорости: кг · м/с.

Произведение массы тела на вектор ускорения присутствует в фундаментальном законе механики — втором законе Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

(здесь $\vec{F}$ есть сумма векторов всех сил, приложенных к телу).

Скаляр, умножаемый на вектор, не обязан быть положительным. Например, электрическое поле характеризуется вектором напряжённости $\vec{E}$, который задан в каждой точке поля. Если в данную точку помещён заряд q, то сила, действующая на этот заряд со стороны электрического поля, равна:

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

При этом заряд q может быть как положительным, так и отрицательным.

3.1 Что такое умножение скаляра на вектор?

Давайте начнём с примеров и посмотрим на рис. 19.

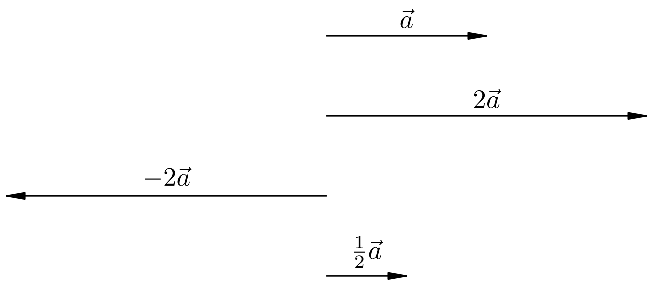

Рис. 19. Умножение разных скаляров на вектор $\vec{a}$

В самом верху рисунка расположен вектор $\vec{a}$. Ниже находится вектор $2\vec{a}$: он в два раза длиннее вектора $\vec{a}$ и сонаправлен с ним.

Ещё ниже мы видим вектор $-2\vec{a}$. Он также вдвое длиннее вектора $\vec{a}$, но имеет противоположное направление.

Наконец, в самом низу рисунка расположен вектор $\frac{1}{2}\vec{a}$. Он сонаправлен с вектором $\vec{a}$ и в два раза короче него. Этот вектор можно обозначить также $\vec{a}/2$.

После этого примера операция умножения вектора на скаляр ясна без всяких определений, но строгое определение мы всё же дадим.

Определение. *Пусть λ — скаляр. Запись $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ означает, что: 1) $|\vec{b}| = |\lambda||\vec{a}|$; 2) вектор $\vec{b}$ сонаправлен с вектором $\vec{a}$ при $\lambda > 0$ и направлен противоположно вектору $\vec{a}$ при $\lambda < 0$ (если же $\lambda = 0$, то из первого пункта следует, что $\vec{b} = \vec{0}$).*

Разделить вектор на скаляр $\lambda \neq 0$ — это значит умножить этот вектор на скаляр $1/\lambda$.

Операция умножения скаляра на вектор также обладает хорошими свойствами — привычными с точки зрения алгебры. Рассмотрим их.

3.2 Свойства умножения скаляра на вектор

Называть рассматриваемые свойства мы будем так, как это принято в математике. Запоминать эту терминологию сейчас не обязательно, но на первом курсе вы всё равно никуда от неё не денетесь :-)

1. Умножение вектора на единицу не меняет этого вектора:

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}. \tag{5}$$

   Это непосредственно следует из определения.

2. Ассоциативность умножения:

$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}. \tag{6}$$

   Иными словами, если сначала умножить вектор $\vec{a}$ на μ, а потом полученный вектор умножить на λ, то это всё равно, что сразу умножить $\vec{a}$ на скаляр $\lambda\mu$.

   Ассоциативность умножения скаляра на вектор иллюстрируется на рис. 20. Сначала вектор $\vec{a}$ умножили на 2 и получили вектор $2\vec{a}$. Затем полученный вектор умножили на 3. Получился вектор $3(2\vec{a}) = (3 \cdot 2)\vec{a} = 6\vec{a}$.

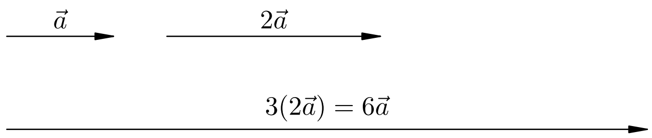

Рис. 20. Ассоциативность умножения скаляра на вектор

   Давайте возьмём пример из физики. Если тело массы m, движущееся со скоростью $\vec{v}$, налетает на покоящееся тело массы M и слипается с ним (так называемый неупругий удар), то из закона сохранения импульса легко следует, что после удара слипшиеся тела будут двигаться со скоростью

$$\frac{m\vec{v}}{m+M}.$$

   Благодаря ассоциативности умножения мы можем понимать эту запись как угодно:

   - либо сначала умножили вектор $\vec{v}$ на скаляр m и затем поделили полученный вектор $m\vec{v}$ на скаляр $m + M$;
   - либо сначала поделили m на $m+M$ и потом умножили полученное число $m/(m+M)$ на вектор $\vec{v}$.

   Результат в обоих случаях будет одним и тем же.

3. Дистрибутивность умножения относительно сложения скаляров:

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}. \tag{7}$$

Попросту говоря, мы можем раскрывать скобки (если читать данное равенство слева направо) или выносить за скобки общий векторный множитель (если — справа налево).

Рисунок 21 иллюстрирует это свойство. Пусть дан вектор $\vec{a}$. Берём вектор $2\vec{a}$ и в его конец помещаем начало вектора $3\vec{a}$. Складывая их, получаем вектор $2\vec{a} + 3\vec{a} = 5\vec{a} = (2+3)\vec{a}$.

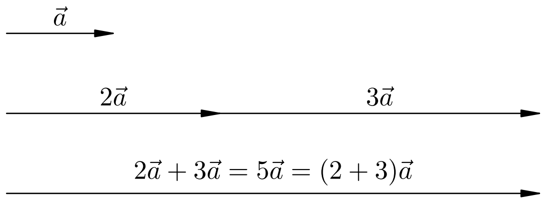

Рис. 21. Дистрибутивность относительно сложения скаляров

Вот соответствующий физический пример. Пусть два тела массами m_1 и m_2 движутся с одинаковой скоростью $\vec{v}$. Импульс первого тела равен $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}$, импульс второго тела равен $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}$. Импульс системы этих тел равен векторной сумме импульсов каждого тела:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v} + m_2\vec{v}.$$

Согласно свойству (7) общий векторный множитель можно вынести за скобки:

$$\vec{p} = (m_1 + m_2)\vec{v}.$$

4. Дистрибутивность относительно сложения векторов:

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}. \tag{8}$$

И в таком случае, как видим, мы можем раскрывать скобки или, наоборот, выносить за скобки общий скалярный множитель.

Иллюстрацией этого свойства служит рис. 22. Пусть $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (левая часть рисунка). Тогда $2\vec{c} = 2(\vec{a} + \vec{b})$. Но из правой части рисунка мы видим, что $2\vec{c} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$. Следовательно, $2(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$.

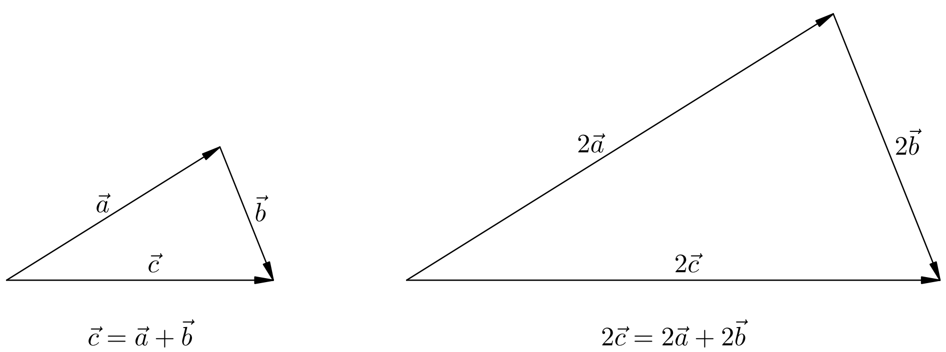

Рис. 22. Дистрибутивность относительно сложения векторов

И здесь рассмотрим пример из физики. Пусть имеется заряд q. Расположенные неподалёку заряды q_1 и q_2 создают в точке нахождения заряда q электрические поля, напряжённости которых равны $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ соответственно. Какая сила будет действовать на заряд q?

Со стороны заряда q_1 на заряд q действует сила $\vec{F}_1 = q\vec{E}_1$. Со стороны заряда q_2 на заряд q действует сила $\vec{F}_2 = q\vec{E}_2$. Искомая сила $\vec{F}$ является равнодействующей сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q\vec{E}_1 + q\vec{E}_2.$$

Согласно свойству (8) общий скалярный множитель выносится за скобки:

$$\vec{F} = q(\vec{E}_1 + \vec{E}_2).$$

Свойства (1)–(8) позволяют обращаться с векторными выражениями по хорошо знакомым алгебраическим правилам: раскрывать скобки, приводить подобные, переносить слагаемые в другую часть равенства с противоположным знаком... Вы наверняка это знаете и используете; но вы могли не задумываться о том, что эти вещи *не так уж очевидны*. Одна из целей данной статьи — приоткрыть занавес и прояснить, почему к выражениям с векторами во многом применимы те же правила алгебры, что и к обычным буквенным выражениям.

4 Угол между векторами

Выше мы рассмотрели две операции над векторами: сложение векторов и умножение скаляра на вектор. Если бы при работе с векторами нам были доступны лишь эти две операции, наши возможности в физике и геометрии оказались бы весьма ограниченными.

Но, к счастью, это не так. Мы можем вдобавок ввести понятие угла между векторами и с помощью него определить новые операции, которые хорошо согласуются с уже изученными. Благодаря столь богатому набору операций векторы становятся мощным инструментом исследования физического мира.

4.1 Что такое угол между векторами?

Можно сказать так: *угол между векторами — это угол между их направлениями*. Это, конечно, не очень строго, но зато интуитивно понятно.

Но мы не будем гнаться за строгим определением, а просто сделаем рисунок — он скажет лучше всяких слов.

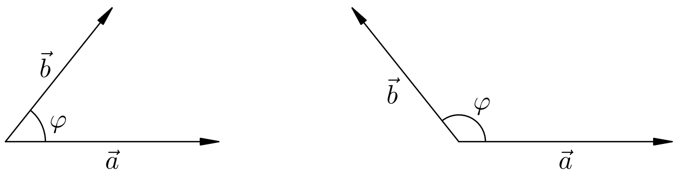

Рис. 23. Угол между векторами

Как видим из рис. 23, угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — это угол, образованный лучами, идущими вдоль этих векторов из общего начала. Угол между векторами принимает значения от 0 до 180°.

4.2 Угол между вектором и осью

Ключевую роль в дальнейшем будет играть понятие оси. *Ось — это прямая, снабжённая направлением* (рис. 24).

Рис. 24. Ось

Вы давно привыкли к координатным осям, поэтому данное понятие вам хорошо знакомо.

Угол между вектором и осью определяется точно так же, как и угол между векторами. *Угол между вектором и осью — это угол между их направлениями* (рис. 25). Так, вектор $\vec{a}$ образует с осью X острый угол α, а вектор $\vec{b}$ образует с осью X тупой угол β.

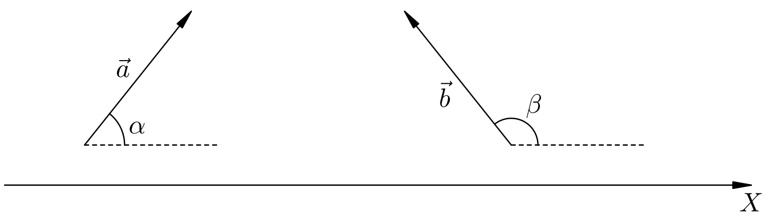

Рис. 25. Угол между вектором и осью

Угол между вектором и осью также принимает значения от 0 до 180°.

5 Проекция вектора на ось

Теперь мы готовы ввести важнейшее понятие проекции вектора на ось. Оно постоянно используется при решении физических задач.

5.1 Что такое проекция вектора на ось?

Пусть даны вектор $\vec{a}$ и ось X. Предполагается, что на оси X имеется масштаб, позволяющий измерять длины отрезков и присваивать им размерность вектора $\vec{a}$.

Из начала и конца вектора $\vec{a}$ опустим перпендикуляры на ось X; пусть A и B — основания этих перпендикуляров (рис. 26). Длину отрезка AB обозначим $|AB|$.

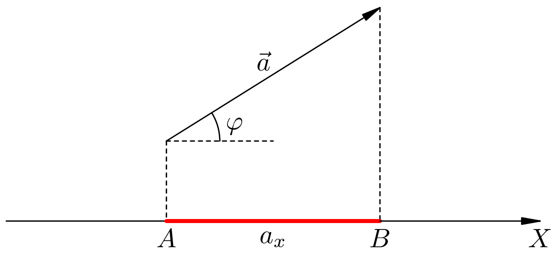

Рис. 26. Проекция вектора на ось

Определение. *Проекция a_x вектора $\vec{a}$ на ось X равна длине отрезка AB, взятой со знаком плюс, если угол φ между вектором $\vec{a}$ и осью X является острым, и взятой соответственно со знаком минус, если φ тупой (или развёрнутый). Если угол φ прямой, то $a_x = 0$.*

Короче говоря, имеем следующую формулу:

$$a_x = \begin{cases} |AB|, & \text{если } \varphi < 90^\circ; \\ -|AB|, & \text{если } \varphi > 90^\circ; \\ 0, & \text{если } \varphi = 90^\circ. \end{cases} \tag{9}$$

Рисунок 27 иллюстрирует все эти возможности.

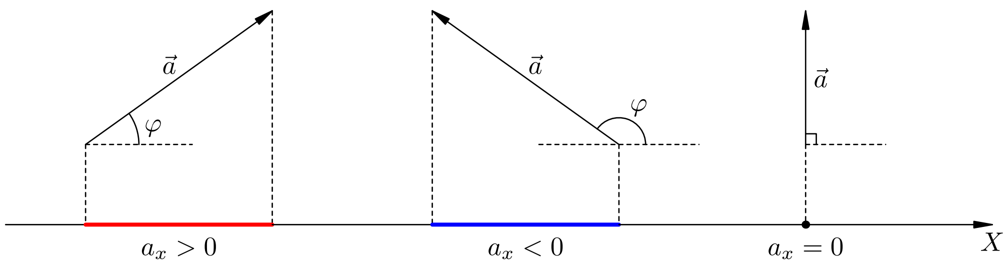

Рис. 27. Проекция вектора на ось. Примеры

Глядя на рис. 27, нетрудно сообразить, что все три случая — красный отрезок, синий отрезок и точка — охватываются одной-единственной формулой, и очень простой!

Следствие 1. *Если угол между вектором $\vec{a}$ и осью X равен φ, то проекция a_x вычисляется по формуле:*

$$a_x = a\cos\varphi. \tag{10}$$

Здесь, как обычно, $a = |\vec{a}|$ — модуль вектора $\vec{a}$.

Действительно, если $\varphi < 90^\circ$, то формула (10) даёт длину красного отрезка на рис. 27.

Если $\varphi > 90°$, то, переходя в средней части рис. 27 к углу, смежному с углом φ, мы видим, что формула (10) даёт длину синего отрезка со знаком минус (за счёт отрицательности косинуса), что нам как раз и нужно.

Наконец, если $\varphi = 90°$, то формула (10) даёт $a_x = 0$, поскольку косинус прямого угла равен нулю. Именно так и должно быть (правая часть рисунка).

Предположим теперь, что на оси X задано вдобавок начало отсчёта, так что она является привычной координатной осью. Тогда имеем ещё одну формулу для проекции a_x, которая также содержит в «заархивированном» виде все три случая рисунка 27.

Следствие 2. *Пусть x_1 и x_2 — координаты соответственно начала и конца вектора $\vec{a}$. Тогда проекция a_x вычисляется по формуле:*

$$a_x = x_2 - x_1. \tag{11}$$

Действительно, посмотрим на рис. 28. Это случай положительной проекции. Из рисунка очевидно, что разность $x_2 - x_1$ равна длине красного отрезка, а эта длина в данном случае как раз и есть проекция a_x.

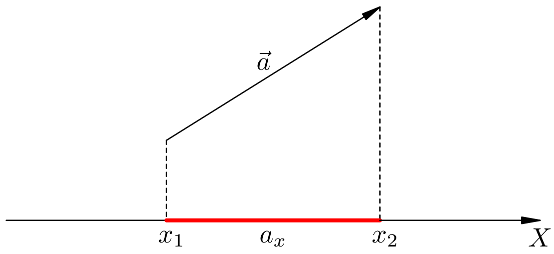

Рис. 28. Проекция вектора на ось. К следствию 2

Что будет в оставшихся двух случаях (синий отрезок и точка)? Убедитесь, пожалуйста, самостоятельно, что формула (11) и для них остаётся справедливой.

5.2 Свойства проектирования вектора на ось

Операция проектирования вектора на ось замечательным образом согласована с операциями сложения векторов и умножения скаляра на вектор. А именно, какова бы ни была ось X, имеют место следующие два свойства проектирования.

1. *Проекция вектора $\vec{a} + \vec{b}$ на ось X равна $a_x + b_x$.*

   Краткая словесная формулировка: *проекция суммы векторов равна сумме их проекций.* Это справедливо для суммы любого числа векторов, не только двух.

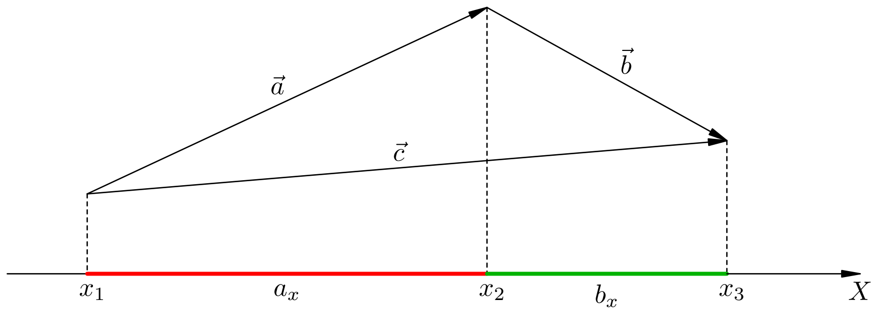

Рис. 29. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow c_x = a_x + b_x$

   Прежде всего проиллюстрируем данное утверждение на рисунке. Поместим начало вектора $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{a}$, и пусть $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 29).

На данном рисунке хорошо видно, что проекция c_x равна сумме длин красного и зелёного отрезков, то есть как раз $a_x + b_x$.

Правда, рис. 29 сделан для случая $a_x > 0$ и $b_x > 0$. Чтобы доказать наше утверждение сразу для всех возможных значений проекций a_x и b_x, мы проведём следующее универсальное рассуждение, опирающееся на формулу (11).

Итак, пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ расположены произвольным образом. Снова совместим начало вектора $\vec{b}$ с концом вектора $\vec{a}$ и обозначим $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Пусть:

- x_1 — координата начала вектора $\vec{a}$ и одновременно начала вектора $\vec{c}$;
- x_2 — координата конца вектора $\vec{a}$ и одновременно начала вектора $\vec{b}$;
- x_3 — координата конца вектора $\vec{b}$ и одновременно конца вектора $\vec{c}$.

Эти обозначения также присутствуют на рис. 29.

В силу формулы (11) имеем: $a_x = x_2 - x_1$, $b_x = x_3 - x_2$, $c_x = x_3 - x_1$. Теперь легко видеть, что:

$$a_x + b_x = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) = x_3 - x_1 = c_x.$$

Наше первое свойство проектирования тем самым доказано.

2. *Проекция вектора $\lambda\vec{a}$ на ось X равна λa_x.*

Словесная формулировка: *проекция произведения скаляра на вектор равна произведению скаляра на проекцию вектора.*

Снова начнём с иллюстрации. В левой части рисунка 30 изображён вектор $\vec{a}$ с положительной проекцией a_x.

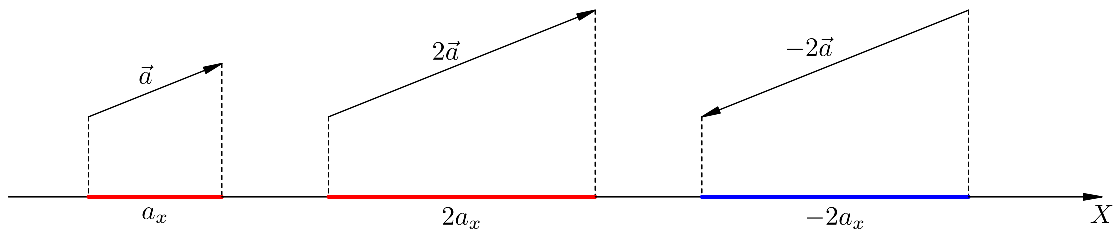

Рис. 30. Проекция вектора $\lambda\vec{a}$ равна λa_x

Если умножить вектор $\vec{a}$ на 2, то его длина увеличится в два раза, проекция вектора также увеличится вдвое (сохраняя знак) и станет равна $2a_x$.

Если умножить вектор $\vec{a}$ на -2, то его длина опять-таки увеличится в два раза, но направление изменится на противоположное. Проекция изменит знак и станет равна $-2a_x$.

Тем самым суть второго свойства ясна, и теперь можно дать строгое доказательство. Итак, пусть $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Мы ходим доказать, что $b_x = \lambda a_x$.

Воспользуемся для этого формулой (10). Имеем:

$$a_x = a\cos\varphi, \quad b_x = b\cos\theta,$$

где φ — угол между вектором $\vec{a}$ и осью X, а θ — угол между вектором $\vec{b}$ и осью X. Кроме того, в силу определения умножения скаляра на вектор:

$$b = |\lambda|a.$$

Таким образом:

$$b_x = |\lambda| a \cos\theta.$$

Если $\lambda > 0$, то $|\lambda| = \lambda$; в этом случае вектор $\vec{b}$ сонаправлен с вектором $\vec{a}$, и потому $\theta = \varphi$. Имеем:

$$b_x = \lambda a \cos\varphi = \lambda a_x.$$

Если $\lambda < 0$, то $|\lambda| = -\lambda$; в этом случае вектор $\vec{b}$ противоположен по направлению вектору $\vec{a}$. Нетрудно сообразить при этом, что $\theta = \pi - \varphi$ (например, если φ острый, то θ есть смежный с ним тупой, и наоборот). Имеем тогда:

$$b_x = (-\lambda) a \cos(\pi - \varphi) = (-\lambda) a (-\cos\varphi) = \lambda a \cos\varphi = \lambda a_x.$$

Ну а в тривиальном случае $\lambda = 0$ доказывать нечего: тогда $\vec{b} = \vec{0}$ и $b_x = 0 = 0 \cdot a_x = \lambda a_x$. Итак, во всех случаях получается нужное соотношение, и тем самым второе свойство проектирования полностью доказано.

5.3 Операция проектирования в физике

Доказанные свойства операции проектирования очень важны для нас. В механике, например, мы будем пользоваться ими на каждом шагу.

Так, решение многих задач по динамике начинается с записи второго закона Ньютона в векторной форме. Возьмём, к примеру, маятник массы m, подвешенный на нити. Для маятника второй закон Ньютона будет иметь вид:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{f}, \tag{12}$$

где $\vec{T}$ — сила упругости нити, $\vec{f}$ — сила сопротивления воздуха.

Записав второй закон Ньютона в векторной форме, мы переходим к его проектированию на подходящие оси. Берём равенство (12) и проектируем на ось X:

$$ma_x = mg_x + T_x + f_x. \tag{13}$$

При переходе от векторного равенства (12) к скалярному равенству (13) использованы оба свойства проектирования! А именно, благодаря свойству 1 мы записали проекцию суммы векторов как сумму их проекций; в силу же свойства 2 мы смогли записать проекции векторов $m\vec{a}$ и $m\vec{g}$ в виде ma_x и mg_x.

Таким образом, оба свойства операции проектирования обеспечивают переход от векторных равенств к скалярным, и переход этот можно выполнять формально и не задумываясь: *отбрасываем стрелки в обозначениях векторов и ставим вместо них индексы проекций*. Именно так выглядит переход от уравнения (12) к уравнению (13).

6 Векторы и координаты

Чрезвычайно важным применением трёх рассмотренных нами операций над векторами (сложения, умножения на скаляр и проектирования на ось) является *разложение вектора по базису* декартовой прямоугольной системы координат.

6.1 Разложение вектора по базису

Рассмотрим систему координат OXY (рис. 31). Оси X и Y снабжены *единичными векторами* $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — длины этих векторов равны единице, причём этой самой единице не приписывается никакая размерность. Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ называются *базисом* системы координат OXY.

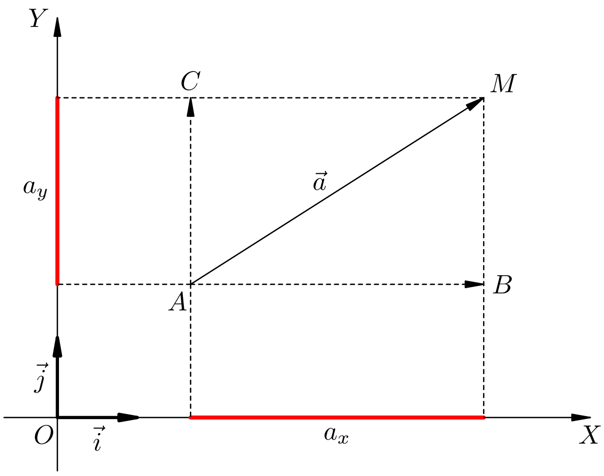

Рис. 31. Разложение вектора по базису

Пусть вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ имеет начало в точке A. Опустим из начала и конца вектора $\vec{a}$ перпендикуляры на координатные оси и проведём векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ параллельно осям OX и OY соответственно. Тогда $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Ясно, что $\overrightarrow{AB} = a_x\vec{i}$ при любом знаке проекции a_x. Аналогично, $\overrightarrow{AC} = a_y\vec{j}$ при любом знаке проекции a_y. Следовательно,

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}. \tag{14}$$

Это и есть разложение вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$ системы координат OXY. Проекции a_x и a_y называются также *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$.

6.2 Нахождение модуля вектора по его проекциям

В физике, как правило, мы находим проекции интересующего нас вектора по отдельности, решая для этих проекций соответствующие уравнения. Дальнейший процесс «сборки» вектора по его проекциям никакого труда не представляет.

Из треугольника ABM (рис. 31) по теореме Пифагора имеем:

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2}.$$

Но $AM = a$ — это модуль вектора $\vec{a}$. Кроме того, при любых знаках проекций a_x и a_y справедливы равенства $AB^2 = a_x^2$ и $BM^2 = a_y^2$. Следовательно:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \tag{15}$$

Формула (15) часто используется в физических задачах. Вот типичный пример.

Задача. Тело брошено горизонтально со скоростью $\vec{v}_0$. Найти скорость тела спустя время t. Под каким углом к горизонту направлена эта скорость?

Решение. Имеем: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$. Направляя ось X горизонтально, а ось Y — вертикально вверх, для проекций скорости получим:

$$v_x = v_0, \quad v_y = -gt.$$

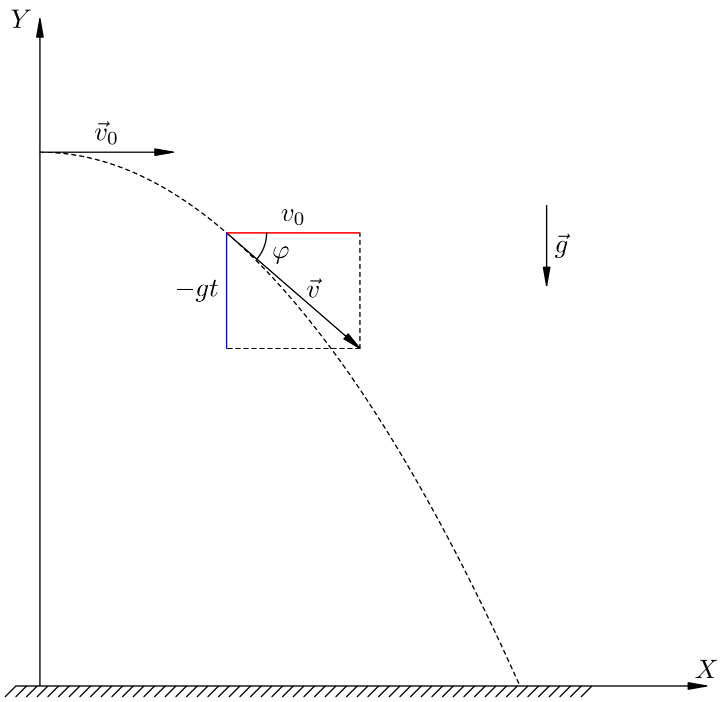

Рис. 32. К задаче о горизонтальном броске

Теперь формула (15) даёт:

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}\,.$$

Это, впрочем, очевидно из рис. 32 и непосредственно по теореме Пифагора.

Для искомого угла φ имеем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|v_y|}{v_x} = \frac{gt}{v_0}\,.$$

Отсюда

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{gt}{v_0}\right).$$

7 Скалярное произведение векторов

Для начала давайте вспомним, как в механике определяется понятие работы силы. Рассмотрим тело, находящееся на горизонтальной поверхности (рис. 33). Пусть на тело действует сила $\vec{F}$ под углом α к горизонту, и под действием этой силы тело совершило перемещение $\vec{s}$.

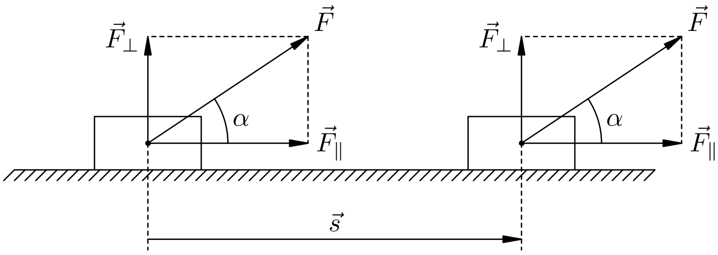

Рис. 33. К определению работы силы

Разложим силу $\vec{F}$ на две составляющих: $\vec{F} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp$; сила $\vec{F}_\parallel$ параллельна вектору перемещения, а сила $\vec{F}_\perp$ перпендикулярна ему. Работой A силы $\vec{F}$ называется в данном случае произведение модуля параллельной составляющей на модуль перемещения:

$$A = F_\parallel s.$$

Но $F_\parallel = F \cos\alpha$, поэтому

$$A = Fs\cos\alpha. \tag{16}$$

Формула (16) как раз и является определением физической величины, называемой работой. Это определение справедливо для любого угла α между силой и перемещением. Если, например, $\alpha > 90^\circ$, то работа отрицательна (за счёт отрицательности косинуса). Если сила перпендикулярна перемещению, то работа этой силы равна нулю.

Заметим ещё, что в силу формулы (10) величина $F\cos\alpha$ есть F_s — проекция вектора $\vec{F}$ на ось вектора[4] $\vec{s}$. Поэтому

$$A = F_s s.$$

Эта формула также справедлива для любого угла между векторами $\vec{F}$ и $\vec{s}$.

7.1 Что такое скалярное произведение?

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Угол между этими векторами обозначим φ (рис. 34).

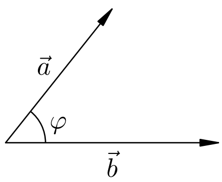

Рис. 34. К определению скалярного произведения

Определение. *Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}$) — это скаляр, равный произведению модулей векторов на косинус угла между ними*:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\varphi. \tag{17}$$

В силу формулы (10) величина $a\cos\varphi$ есть a_b — проекция вектора $\vec{a}$ на ось вектора $\vec{b}$. Поэтому имеем:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_b b. \tag{18}$$

[4] *Осью вектора* называется ось, направление которой совпадает с направлением данного вектора.

7.2 Свойства скалярного произведения

1. Скалярное умножение коммутативно:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}. \tag{19}$$
Это очевидно из формулы (17). Ведь если поменять местами векторы-сомножители, то угол между ними не изменится.

2. При скалярном умножении вектора на самого себя получается квадрат его модуля:
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2. \tag{20}$$
Это также очевидно из формулы (17) — вектор $\vec{a}$ образует сам с собой нулевой угол, и потому $\vec{a} \cdot \vec{a} = a \cdot a \cos 0 = a^2$.

Кстати, величина $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$. Таким образом, $\vec{a}^2 = a^2$.

3. Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда угол между векторами прямой.

Это очевидно. Раз $a, b \neq 0$, то
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 90^\circ.$$

4. Скалярное произведение ассоциативно при умножении на скаляр:
$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}). \tag{21}$$
Таким образом, не играет роли, в какой последовательности выполнять указанные операции.

Для доказательства используем формулу (18). Согласно этой формуле $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda a_b b$.

Обозначим $\vec{c} = \lambda \vec{a}$. Тогда в силу свойства 2 операции проектирования имеем: $c_b = \lambda a_b$. Ну а теперь снова используем формулу (18):
$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{b} = c_b b = \lambda a_b b.$$
Итак, обе части доказываемого соотношения равны одной и той же величине $\lambda a_b b$, так что наша ассоциативность действительно имеет место. Поэтому скобки в таких выражениях можно опускать и писать просто $\lambda \vec{a} \cdot \vec{b}$.

Обратите внимание, что скалярное произведение не обладает «полноценной» ассоциативностью: $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$. (Сможете сами придумать пример?) Следовательно, нельзя записать выражение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ — оно не является корректно определённым, поскольку его значение зависит от порядка выполнения умножений.

5. Скалярное произведение дистрибутивно:
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}. \tag{22}$$
Для доказательства обозначим $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$. Согласно свойству 1 проектирования вектора на ось проекция вектора $\vec{u}$ на ось вектора $\vec{c}$ равна сумме проекций: $u_c = a_c + b_c$. Тогда имеем:
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{u} \cdot \vec{c} = u_c c = (a_c + b_c)c = a_c c + b_c c = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c},$$
что и требовалось. Следовательно, в таких ситуациях мы можем обычным образом раскрывать скобки и выносить за скобки общий векторный множитель.

7.3 Скалярное произведение в физике

Подчеркнём ещё раз, что скалярное произведение — это не вектор, а скаляр. Иными словами, в физике скалярное произведение есть число, обладающее размерностью. Размерность скалярного произведения равно произведению размерностей векторов-сомножителей.

Из определения работы — формулы (16) — мы видим теперь, что работа есть скалярное произведение векторов силы и перемещения:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}. \tag{23}$$

Если тело движется равномерно и прямолинейно, то есть с постоянной скоростью $\vec{v}$, то $\vec{s} = \vec{v}t$. Подставляя это в формулу (23), получим:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{v}t. \tag{24}$$

Благодаря ассоциативности (21) при умножении на скаляр нам всё равно, в каком порядке перемножаются эти множители. Удобно воспринять формулу (24) как $A = (\vec{F} \cdot \vec{v})t$ и поделить обе части на t. Получим формулу для мощности:

$$P = \frac{A}{t} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Далее, пусть на тело действуют две силы: $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Эти силы совершают соответственно работы:

$$A_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{s}, \quad A_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{s}.$$

Какую работу совершает равнодействующая $\vec{F}$ этих сил? Пользуемся дистрибутивностью (22):

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot \vec{s} = \vec{F}_1 \cdot \vec{s} + \vec{F}_2 \cdot \vec{s} = A_1 + A_2.$$

Вывод: работа равнодействующей силы равна сумме работ каждой из сил в отдельности. Иными словами, приложенные к телу силы складываются векторно, а их работы — алгебраически[5].

7.4 Вычисление скалярного произведения в координатах

Предположим, что на плоскости задана прямоугольная система координат OXY (как показано на рис. 31). Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — единичные векторы координатных осей.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ расположены на этой плоскости. Пусть, как обычно, a_x и a_y — проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси (или, что то же самое, координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$). Аналогичный смысл имеют обозначения b_x и b_y.

Теорема. *Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется через их координаты следующим образом:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y. \tag{25}$$

Для доказательства используем формулу (14) разложения вектора по базису:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}, \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}.$$

Подставляем эти разложения в качестве сомножителей в скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, после чего пользуемся дистрибутивностью (22), обычным образом раскрывая скобки:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j}) = a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j}.$$

[5] Проявление этого факта мы встречаем в электростатике: напряжённости полей, создаваемых в данной точке разными зарядами, складываются векторно, а потенциалы этих полей — алгебраически.

Остаётся заметить, что $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, и потому

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

Теорема доказана.

Если в формуле (25) положить $\vec{b} = \vec{a}$, то получим:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2.$$

Но $\vec{a} \cdot \vec{a}$, как мы знаем из свойства (20), равно a^2. Поэтому

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2,$$

или

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,.$$

Мы снова получили формулу (15), но на сей раз вышли на неё со стороны скалярного произведения.