Векторы и механика

В данном листке обсуждаются скалярное и векторное произведение, а также применение векторных операций в механике: момент силы, момент импульса, уравнение моментов, неинерциальные системы отсчёта. Понимание этих вещей необходимо для подготовки к физическим олимпиадам высокого уровня, да и вообще для более глубокого осмысления механики (и впоследствии электродинамики).

Для работы с листком необходимо некоторое начальное знакомство с темой. Предполагается известным материал следующих пособий:

1. «Векторы в физике» (наиболее важное тут — проекция вектора на ось, разложение вектора по базису и скалярное произведение);
2. «Производная» (а именно — определение производной, правило дифференцирования суммы и произведения функций, дифференцирование векторов).

Скалярное произведение

Прежде всего повторим самое главное.

Задача 1. Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные векторы (*орты*) пространственной прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ (так называемый *ортонормированный базис*). Напомним, что *координатами* вектора $\vec{a}$ в этом базисе называются такие числа a_x, a_y, a_z, что

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Покажите, что

$$a_x = \vec{a}\cdot\vec{i}, \quad a_y = \vec{a}\cdot\vec{j}, \quad a_z = \vec{a}\cdot\vec{k}.$$

Задача 2. Покажите, что скалярное произведение коммутативно:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

и ассоциативно относительно умножения на скаляр:

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

(поэтому можно просто писать $\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}$ — не играет роли, что на что мы умножаем сначала).

Задача 3. Верно ли, что скалярное произведение ассоциативно относительно умножения векторов? Иными словами, обязательно ли $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$, т. е. имеет ли смысл запись $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$?

Задача 4. а) Объясните, почему проекция суммы векторов на ось равна сумме их проекций на эту ось.

б) Объясните, почему скалярное произведение равно проекции одного из векторов-сомножителей на ось другого.

в) Докажите дистрибутивность скалярного произведения:

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Указание. Если не получается, то повторите разделы 5 и 7 пособия «Векторы в физике».

Благодаря свойству дистрибутивности мы можем вычислить скалярное произведение через координаты векторов-сомножителей.

Задача 5. Покажите, что скалярное произведение выражается через координаты сомножителей (в ортонормированном базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) следующим образом:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Задача 6. Пусть **для любого** вектора $\vec{u}$ выполнено $\vec{a} \cdot \vec{u} = \vec{b} \cdot \vec{u}$. Докажите, что $\vec{a} = \vec{b}$.

Задача 7. Дайте определение: а) производной $\frac{df}{dt}$ скалярной функции $f(t)$; б) производной $\frac{d\vec{f}}{dt}$ векторной функции $\vec{f}(t)$.

Задача 8. Докажите, что

$$\text{а) } \frac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}\,; \qquad \text{б) } \frac{d}{dt}(\lambda\vec{a}) = \frac{d\lambda}{dt}\vec{a} + \lambda\frac{d\vec{a}}{dt}\,; \qquad \text{в) } \frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}\,.$$

Покажите, в частности, что для производной квадрата длины вектора $\vec{a}$ имеет место формула

$$\frac{da^2}{dt} = 2\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}\,.$$

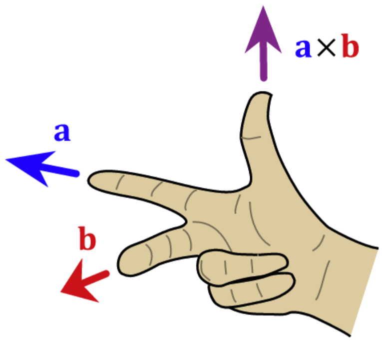
Задача 9. (*Всеросс., 2003, финал, 9*) Мальчик бросил камень под некоторым углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, при каких значениях угла бросания α камень всё время (до падения на землю) будет удаляться от мальчика.

$\boxed{\sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3}}$

Векторное произведение

Векторное произведение естественным образом появляется в механике при описании вращательного движения[1].

Определение. Вектор $\vec{c}$ называется *векторным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (обозначается $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$), если выполнены следующие условия.



1) Длина вектора $\vec{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi,$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отсюда сразу следует, что векторное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители коллинеарны[2], а длина векторного произведения перпендикулярных векторов равна произведению их длин.

2) Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то вектор $\vec{c}$ перпендикулярен их плоскости и направлен в то полупространство, из которого кратчайший поворот вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден

[1] В электродинамике оно столь же естественно возникает при описании магнитного поля.

[2] Нулевой вектор считаем коллинеарным любому вектору.

против часовой стрелки. Иллюстрация направления векторного произведения с помощью *правила правой руки*[3] приведена на рисунке.

Задача 10. Убедитесь, что векторное произведение обладает следующими свойствами.

- Антикоммутативность: $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$.
- Ассоциативность относительно умножения на скаляр: $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$. Поэтому можно просто писать $\lambda\vec{a} \times \vec{b}$.

Задача 11. Для ортонормированного базиса $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ найдите $\vec{i} \times \vec{j}$, $\vec{i} \times \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k}$.

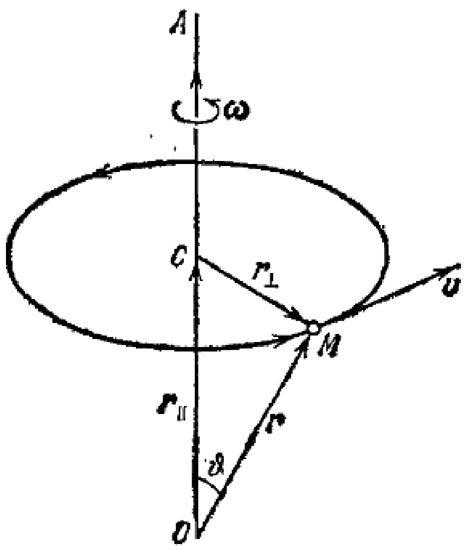
$\boxed{\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k};\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j};\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}}$

Векторное произведение широко применяется в механике, и связано это с тем, что угловая скорость, оказывается, является вектором!

Определение. Пусть точка движется по окружности. Вектор $\vec{\omega}$ угловой скорости точки определяется следующим образом.

- Вектор $\vec{\omega}$ направлен перпендикулярно плоскости окружности в то полупространство, из которого вращение точки видится против часовой стрелки.
- Длина вектора $\vec{\omega}$ равна угловой скорости точки.

Задача 12. Пусть точка M движется по окружности с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Проведём через центр C этой окружности прямую, перпендикулярную плоскости окружности, и выберем на этой прямой произвольную точку O. Пусть $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ — радиус-вектор точки M, проведённый из точки O (таким образом, в процессе вращения точки M её радиус-вектор $\vec{r}$ заметает поверхность конуса с вершиной O; ниже приведён соответствующий рисунок из Сивухина).



Покажите, что для скорости $\vec{v}$ точки M справедливо равенство $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Задача 13. (*Сивухин, §46, задача 3*) Пусть вектор $\vec{A}$ неизменной длины вращается вокруг своего начала с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Покажите, что

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}.$$

[3] Картинка из английской Википедии.

В частности, при вращении координатной системы орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ дифференцируются по формулам:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}, \qquad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}, \qquad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}.$$

Замечательно, что векторное произведение дистрибутивно:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}. \tag{1}$$

Это очень сильное свойство векторного произведения, совершенно не очевидное на первый взгляд. Именно благодаря своей дистрибутивности операция векторного произведения служит мощным инструментом геометрии и физики.

Доказать дистрибутивность векторного произведения не очень просто, но мы это сделаем. Введём ещё одну важную векторную операцию — смешанное произведение.

Определение. Смешанным произведением $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется скалярное произведение первого вектора на векторное произведение второго и третьего:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Задача 14. Покажите, что смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы компланарны.

Определение. Будем говорить, что некомпланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (именно в этом порядке!) образуют *правую тройку*, если с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден против часовой стрелки. Если же с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден по часовой стрелке, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в указанном порядке образуют *левую тройку*.

Задача 15. Пусть V — объём параллелепипеда, построенного на некомпланарных векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Покажите, что[4]

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{cases} +V, & \text{если } \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \text{ — правая тройка;} \\ -V, & \text{если } \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \text{ — левая тройка.} \end{cases}$$

Задача 16. Пользуясь результатом предыдущей задачи, заключите, что смешанное произведение меняет знак (сохраняя модуль) при перестановке любой пары сомножителей и остаётся неизменным при циклической перестановке всех трёх сомножителей. Последнее означает, что

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}).$$

Вот теперь мы готовы доказать дистрибутивность векторного произведения.

Задача 17. Наряду с тройкой $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ рассмотрите произвольный вектор $\vec{u}$ и смешанное произведение $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{u})$. Докажите формулу (1), используя дистрибутивность скалярного произведения, инвариантность смешанного произведения относительно циклической перестановки и результат задачи 6.

Как и в случае скалярного произведения, дистрибутивность позволяет выразить векторное произведение через координаты сомножителей.

[4] В связи с этим говорят ещё, что смешанное произведение даёт *ориентированный объём* параллелепипеда, построенного на векторах-сомножителях, поскольку знак объёма зависит от ориентации тройки векторов.

Задача 18. Пусть $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Покажите, что

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \qquad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \qquad c_z = a_x b_y - a_y b_x.$$

Задача 19. Убедитесь, что[5]

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}, \qquad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Задача 20. (*Правило «бац минус цаб»*) Докажите формулу преобразования двойного векторного произведения:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

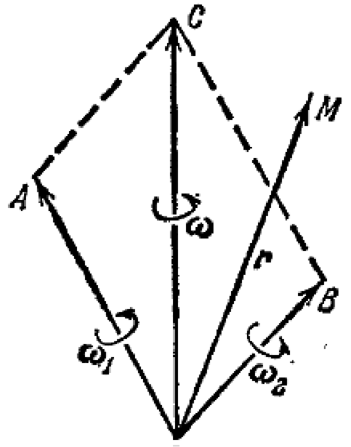
Указание. Действуем в координатах. При этом ортонормированный базис выбираем не абы как, а так, чтобы...

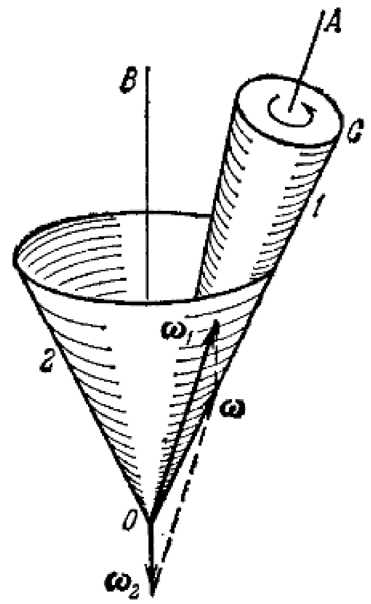
Задача 21. Сделайте части A и B задачи APhO2013.3.

Решение

Рассмотрим простое и важное применение доказанной дистрибутивности в механике — так называемое *сложение вращений*[6].

Задача 22. а) Пусть точка M вращается вокруг оси OA с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$, а ось OA в то же время вращается вокруг оси OB с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$ (левый рисунок, взят из Сивухина). Пользуясь законом сложения (линейных) скоростей, покажите, что наложение этих вращений есть вращение точки M относительно оси OC с угловой скоростью $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$.





б) Конус *1* с осью OA катится без проскальзывания по внутренней поверхности неподвижного конуса *2* с осью OB (правый рисунок, взят из Сивухина). Объясните, почему угловая скорость $\vec{\omega}$ результирующего вращения направлена вдоль общей образующей OC конусов.

[5] Если вы не знакомы с определителями второго и третьего порядка, то посмотрите правило Саррюса.

[6] Сложение вращений встретилось в задаче APhO2017.3 (вопрос A.4).

Задача 23. а) Векторное произведение не обладает свойством ассоциативности: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ не обязательно равно $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ (поэтому запись $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ смысла не имеет). Приведите соответствующий пример.

б) Отдалённой заменой ассоциативности служит *тождество Якоби*:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}.$$

Докажите его.

Задача 24. Докажите, что

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}\,.$$

Задача 25. Пусть точка M *равномерно* движется по окружности (задача 12). Дифференцируя равенство $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, найдите направление и абсолютную величину ускорения точки M.

Определение. Угловым ускорением называется вектор

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\,.$$

Задача 26. Пусть теперь точка M движется по окружности *неравномерно*. Дифференцируя равенство $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, получите формулу для ускорения точки M; интерпретируйте слагаемые как тангенциальное (касательное) и нормальное (центростремительное) ускорения.

$\boxed{\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}}$

Момент силы

Вы давно уже знаете, что «момент силы есть произвение силы на плечо». Однако на самом деле момент силы является вектором и, более того, определяется он как векторное произведение!

Выберем в качестве начала точку O и будем называть её полюсом. Относительно полюса O мы будем рассматривать интересующие нас моменты векторов — момент силы и впоследствии момент импульса.

Определение. Пусть $\vec{r}$ есть радиус-вектор, проведённый из полюса O в точку приложения силы $\vec{F}$. Тогда моментом силы $\vec{F}$ относительно полюса O называется вектор

$$\vec{\mathscr{M}} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Задача 27. Проведём через полюс O ось z перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Возьмём на этой оси любую точку T. Покажите, что проекция $\mathscr{M}_z$ на ось z момента силы $\vec{F}$ относительно полюса T не зависит от выбора точки T и равна по модулю Fl:

$$|\mathscr{M}_z| = Fl,$$

где l — расстояние от точки O до линии действия силы $\vec{F}$ (то есть плечо силы $\vec{F}$ относительно оси z).

Примечание. Таким образом, «произведение силы на плечо» есть на самом деле проекция вектора момента силы на ось, которая в «плоских» задачах статики перпендикулярна плоскости рисунка.

Задача 28. Выясним, как меняется момент силы при переходе к другому полюсу. Момент силы $\vec{F}$ относительно старого полюса O обозначим $\vec{\mathscr{M}}_O$. Момент силы $\vec{F}$ относительно нового полюса A обозначим $\vec{\mathscr{M}}_A$. Пусть $\vec{R} = \overrightarrow{OA}$ — радиус-вектор, проведённый из старого полюса в новый. Покажите, что

$$\vec{\mathscr{M}}_A = \vec{\mathscr{M}}_O - \vec{R} \times \vec{F}.$$

Определение. Пусть к телу приложено несколько сил. Моментом этих сил относительно некоторого полюса называется векторная сумма моментов каждой из этих сил относительно данного полюса.

Задача 29. Покажите, что момент всех сил, приложенных к материальной точке, равен моменту равнодействующей этих сил.

Задача 30. Посмотрим, как меняется суммарный момент сил при переходе к другому полюсу. Пусть $\vec{\mathscr{M}}_O$ — момент всех сил относительно полюса O; $\vec{\mathscr{M}}_A$ — момент всех сил относительно полюса A; $\vec{R} = \overrightarrow{OA}$. Покажите, что

$$\vec{\mathscr{M}}_A = \vec{\mathscr{M}}_O - \vec{R} \times \vec{F},$$

где $\vec{F}$ — равнодействующая всех сил.

Задача 31. Рассмотрим систему из n материальных точек (например, твёрдое тело). Пусть к первой точке приложена сила $\vec{F}_1$, ко второй точке — сила $\vec{F}_2$, ..., к n-й точке — сила $\vec{F}_n$. Пусть $\vec{\mathscr{M}}_1, \vec{\mathscr{M}}_2, \ldots, \vec{\mathscr{M}}_n$ — моменты сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ относительно некоторого полюса. Предположим, что равнодействующая всех сил, приложенных к системе, равна нулю:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \vec{0}$$

(*первое условие равновесия твёрдого тела*). Покажите, что момент всех этих сил

$$\vec{\mathscr{M}} = \vec{\mathscr{M}}_1 + \vec{\mathscr{M}}_2 + \ldots + \vec{\mathscr{M}}_n$$

не зависит от выбора полюса.

Примечание. В частности, если момент всех сил равен нулю (*второе условие равновесия твёрдого тела*) относительно какого-то полюса, то он равен нулю и относительно любого другого полюса (при выполнении первого условия равновесия!). Данный факт позволяет выбрать наиболее удобный полюс (такой, например, чтобы силы, про которые нас не спрашивают и которые нам находить не нужно, имели нулевое плечо). Этим приёмом вы часто пользовались при решении задач.

Задача 32. (*Момент пары*) Пусть в точке P приложена сила $\vec{F}$, а в точке Q — сила $-\vec{F}$. В таком случае мы говорим о *паре* сил.

Моментом пары сил называется векторная сумма моментов этих сил. Покажите, что момент пары не зависит от выбора полюса и равен $\overrightarrow{QP} \times \vec{F}$.

Момент импульса

Момент импульса определяется аналогично моменту силы, только теперь радиус-вектор умножается векторно не на вектор силы, а на вектор импульса.

Начнём с момента импульса материальной точки. Пусть точка массы m имеет скорость $\vec{v}$; импульс точки, стало быть, $\vec{p} = m\vec{v}$. Обозначим, как и выше, через $\vec{r}$ радиус-вектор, проведённый в нашу точку из полюса O.

Определение. Моментом импульса точки называется вектор

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}.$$

Задача 33. Проведём через полюс O ось z перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\vec{r}$ и $\vec{p}$. Возьмём на этой оси любую точку T. Покажите, что проекция L_z на ось z момента импульса относительно полюса T не зависит от выбора точки T и равна по модулю pl:

$$|L_z| = pl,$$

где l — расстояние от точки O до прямой, на которой лежит вектор $\vec{p}$ (то есть плечо импульса $\vec{p}$ относительно оси z).

Задача 34. Точка массы m вращается вокруг оси z по окружности радиуса ρ с угловой скоростью ω (вектор $\vec{\omega}$ направлен в положительном направлении оси z). Пусть в декартовой системе координат $Oxyz$ центр окружности имеет координаты $(0, 0, z_0)$, а текущее положение точки определяется координатами (x, y, z_0) (при этом, разумеется, $\rho^2 = x^2 + y^2$). Найдите вектор момента импульса точки относительно полюса O. Снова убедитесь, что L_z не зависит от z_0.

$$\boxed{\vec{L} = (-mxz_0\omega, -myz_0\omega, m\rho^2\omega)}$$

Задача 35. Чем интересен момент импульса? Пусть полюс O неподвижен. Продифференцировав по времени выражение для момента импульса, покажите, что

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathscr{M}}, \tag{2}$$

где $\vec{\mathscr{M}}$ — момент силы, действующей на точку (разумеется, относительно того же полюса O). Почему существенно требование неподвижности полюса?

Определение. Равенство (2) называется уравнением моментов (для материальной точки).

Если момент силы, действующей на точку, равен нулю, то

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \vec{L} = \text{const}.$$

Это — *закон сохранения момента импульса* для материальной точки.

Задача 36. Покажите, что траектория движения точечной массы m в гравитационном поле неподвижной точечной массы M является плоской кривой[7]. Сделайте аналогичный вывод для случая движения заряда в электростатическом поле другого заряда.

Задача 37. Выясним, как меняется момент импульса при переходе к другому полюсу. Момент импульса относительно старого полюса O обозначим $\vec{L}_O$. Момент импульса относительно нового полюса A обозначим $\vec{L}_A$. Пусть $\vec{R} = \overrightarrow{OA}$ — радиус-вектор, проведённый из старого полюса в новый. Покажите, что

$$\vec{L}_A = \vec{L}_O - \vec{R} \times \vec{p}.$$

Пусть теперь имеется система материальных точек. Напомним, что импульсом системы называется векторная сумма импульсов отдельных точек:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i.$$

Аналогично определяется и момент импульса системы.

[7] Траекториям движения в гравитационном поле посвящён листок «Законы Кеплера».

Определение. Моментом импульса системы точек относительно некоторого полюса называется векторная сумма моментов импульса отдельных точек относительно данного полюса:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i.$$

Задача 38. Посмотрим, как меняется момент импульса системы при переходе от старого полюса O к новому полюсу A. Покажите, что

$$\vec{L}_A = \vec{L}_O - \vec{R} \times \vec{p}, \tag{3}$$

где $\vec{R} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{p}$ — импульс системы.

Задача 39. Записав для каждой точки системы уравнение моментов

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{\mathscr{M}}_i$$

и просуммировав эти равенства по всем точкам системы, покажите, что уравнение моментов для системы имеет вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathscr{M}}_{\text{внеш}}, \tag{4}$$

где $\vec{\mathscr{M}}_{\text{внеш}}$ — сумма моментов *внешних* сил, приложенных к данной системе. (Вопрос: куда делись моменты внутренних сил?)

Определение. Векторное равенство (4) называется уравнением моментов (для системы материальных точек).

Из уравнения (4) мы видим, что если момент внешних сил равен нулю, то $\vec{L} = \text{const}$. Это — *закон сохранения момента импульса* для системы материальных точек. Например, для изолированной системы тел момент импульса сохраняется.

Задача 40. Пусть твёрдое тело вращается вокруг *неподвижной* оси z с угловой скоростью ω. Предположим также, что ось вращения z является осью симметрии данного тела. Полюс выбираем на оси z. Покажите, что:

- момент импульса $\vec{L}$ тела не зависит от выбора полюса и направлен вдоль оси z (для этого вспомните задачу 34);
- абсолютная величина момента импульса тела равна

  $$L = I\omega,$$

  где I — момент инерции тела относительно оси z (напомним, что

  $$I = \sum_i m_i r_i^2,$$

  где r_i — расстояние от точки с массой m_i до оси z);
- для вектора момента импульса имеем, таким образом, $\vec{L} = I\vec{\omega}$;
- уравнение моментов (4) приводит к равенству

  $$I\frac{d\omega}{dt} = \mathscr{M},$$

  где $\mathscr{M}$ — проекция на ось z момента внешних сил $\vec{\mathscr{M}}_{\text{внеш}}$.

Уравнение моментов относительно неподвижной оси

Часто бывает удобно проектировать векторные соотношения на координатные оси и далее работать с уравнениями для проекций. Так, проектируя векторное уравнение моментов (4) на какую-либо неподвижную ось (которую для определённости будем называть осью z), получим скалярное уравнение

$$\frac{dL}{dt} = \mathscr{M}, \tag{5}$$

где L и $\mathscr{M}$ — проекции момента импульса и момента внешних сил на ось z.

Определение. Скалярное равенство (5) называется уравнением моментов относительно неподвижной оси.

Задача 41. Пусть твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω. Полюс выбираем на этой оси. Покажите, что вне зависимости от выбора полюса имеем $L = I\omega$, где I — момент инерции тела относительно оси z.

Таким образом, уравнение (5) приобретает вид

$$I\frac{d\omega}{dt} = \mathscr{M}. \tag{6}$$

Такое же по виду уравнение мы получили в задаче 40. Подчеркнём, однако, что теперь мы не предполагаем тело симметричным относительно оси вращения, и потому вектор момента импульса тела не обязательно направлен вдоль этой оси. Уравнение (6) носит более общий характер — оно является проекцией векторного уравнения моментов (4) на неподвижную ось вращения[8].

Задача 42. Уравнение (6) можно вывести очень просто: записать для каждой точки тела второй закон Ньютона (в проекции на касательную к траектории) и просуммировать по всем точкам. Сделайте это.

Задача 43. Объясните, почему равенство $\mathscr{M} = 0$ есть второе (необходимое) условие равновесия твёрдого тела. Является ли это условие достаточным?

Уравнение моментов относительно движущегося полюса

При выводе уравнения моментов (2) или (4) предполагалось, что полюс неподвижен. Почему это условие было существенно? Потому что при неподвижном полюсе производная радиус-вектора $\vec{r}$, проведённого из полюса в рассматриваемую точку, есть скорость $\vec{v}$ данной точки (в противном случае, если полюс движется, то скорость изменения радиус-вектора точки, вообще говоря, не есть скорость этой точки, поскольку радиус-вектор меняется ещё и за счёт движения полюса).

Однако существуют задачи, в которых использовать неподвижный полюс неудобно[9]. Пусть, например, цилиндрическая труба скатывается с шероховатой наклонной плоскости. Ясно, что моменты сил хотелось бы вычислять либо относительно центра трубы (тогда ненулевой момент будет только у силы трения), либо относительно точки касания трубы с наклонной плоскостью

[8] Уравнение (6) в школьной программе называют иногда «основным уравнением динамики вращательного движения твёрдого тела». В вузовской программе уже нет нужды в такой терминологии: ведь нам понятно теперь, что скалярное уравнение моментов (6) есть просто частный случай векторного уравнения моментов (4).

[9] И таких олимпиадных задач много. Вот лишь некоторые примеры: Mos2013.11.1, Mos2015.11.1, Vse2018F11.1, APhO2009.1, IPhO2014.1A, IPhO2002.3.

(тогда ненулевой момент будет только у силы тяжести). Но оба эти кандидата в полюсы *движутся с ускорением*! А если полюс движется с ускорением, то не проходит вывод уравнения (2), а значит — и уравнения (4).

Тем не менее оказывается, что в рассматриваемой задаче уравнение (4) сохраняет свой вид в обоих случаях — как относительно центра трубы, так и относительно точки касания. Давайте разбираться, почему.

Задача 44. Рассмотрим твёрдое тело массы m. Пусть полюс O покоится, тогда уравнение моментов относительно него имеет вид

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathscr{M}}_O$$

(мы опускаем индекс «внеш» у момента внешних сил). Пусть полюс A движется со скоростью $\vec{v}_A$. Дифференцируя по времени равенство (3), покажите, что

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathscr{M}}_A - m\vec{v}_A \times \vec{v}_C, \tag{7}$$

где $\vec{v}_C$ — скорость центра масс C рассматриваемого тела[10]. Объясните, почему при выборе полюса A в центре трубы или в точке контакта с плоскостью уравнение (7) упростится и перейдёт в уравнение

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathscr{M}}_A.$$

Задача 45. Выбор полюса в центре масс обладает дополнительным удобством. Покажите, что

$$\vec{L}_C = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{u}_i,$$

где $\vec{u}_i$ — скорости точек тела *относительно центра масс* (таким образом, можно отвлечься от движения центра масс и считать его неподвижным).

Задача 46. (*APhO, 2001*)

- Motion of an Electric Dipole in a Magnetic Field.
- Solution.

Неинерциальные системы отсчёта

В данном разделе нам нужно научиться переходить в произвольно движущуюся систему отсчёта[11]. Заодно мы узнаем о том, какие бывают силы инерции[12].

Движение точки массой m в инерциальной системе отсчёта с началом O (эту систему считаем неподвижной и называем далее O-системой) описывается вторым законом Ньютона

$$m\vec{a}_0 = \vec{F}, \tag{8}$$

где $\vec{a}_0$ — ускорение точки в O-системе, $\vec{F}$ — равнодействующая всех сил, приложенных к данной точке. Подчеркнём, что каждая из этих сил есть результат действия на точку m какого-то

[10] Про центр масс можно почитать в соответствующем листке «Центр масс». Обратите внимание заодно, в какой степени умение дифференцировать векторы позволяет сократить тамошние выкладки, которые проведены в координатах специально ради того, чтобы избежать обсуждения вопросов дифференцирования векторов.

[11] Переход во вращающуюся систему требуется, например, в задачах APhO2017.3 и APhO2013.3.

[12] Про силу Кориолиса спросили в задаче APhO2014.1.

другого тела — например, сила тяжести (со стороны планеты Земля), сила упругости (реакция опоры) и т. д.

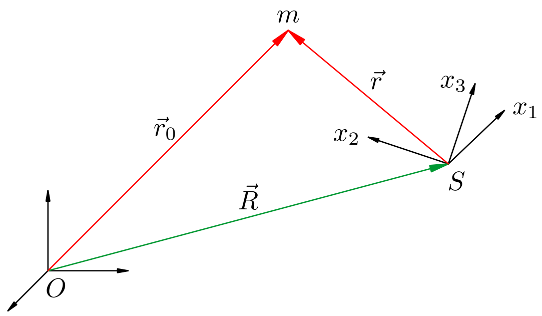
Нас интересует описание движения точки m в новой системе отсчёта $Sx_1x_2x_3$ (её будем называть S-системой), которая движется относительно O-системы. Если это движение является равномерным и прямолинейным, то S-система тоже инерциальна и в ней также выполнен второй закон Ньютона (8). Данный случай интереса не представляет, поэтому далее мы считаем, что движение S-системы относительно O-системы не является равномерным и прямолинейным (S-система движется «кувыркаясь»), и, следовательно, S-система является неинерциальной.

В неинерциальной системе отсчёта второй закон Ньютона в виде (8) уже не выполнен. Оказывается, что вместо (8) нужно писать

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{F} + \textit{силы инерции}. \tag{9}$$

Здесь $\vec{a}_{\text{отн}}$ — ускорение точки m в S-системе, называемое *относительным ускорением*; именно такое ускорение зафиксирует наблюдатель, движущийся вместе с S-системой, для которого S-система является неподвижной. Слагаемое «силы инерции» в правой части возникает в результате ускоренного движения S-системы. Наша цель — определить структуру этого дополнительного слагаемого. Математически мы для этого теперь полностью готовы.

Итак, пусть $\vec{r}_0$ — радиус-вектор точки m в O-системе, $\vec{r}$ — радиус-вектор точки m в S-системе, $\vec{R} = \overrightarrow{OS}$ — радиус-вектор начала S в O-системе (см. рисунок).



Как видим,

$$\vec{r}_0 = \vec{R} + \vec{r}. \tag{10}$$

Пусть $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — единичные векторы координатных осей x_1, x_2, x_3. Координаты точки m в S-системе обозначим теми же буквами x_1, x_2, x_3; таким образом,

$$\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3.$$

Для сокращения подобных записей существует удобное *правило Эйнштейна суммирования по повторяющемуся индексу*, согласно которому последняя формула перепишется в виде

$$\vec{r} = x_i\vec{e}_i. \tag{11}$$

Подставляем (11) в (10):

$$\vec{r}_0 = \vec{R} + x_i\vec{e}_i$$

и дифференцируем данное равенство по времени:

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{dx_i}{dt}\vec{e}_i + x_i\frac{d\vec{e}_i}{dt}\,. \tag{12}$$

Поскольку O-система неподвижна, с производными радиус-векторов всё ясно: $\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{v}_0$ — это скорость точки m в O-системе, $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v}_S$ — это скорость точки S в O-системе. Для большей ясности перепишем равенство (12) с новыми обозначениями:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_S + \frac{dx_i}{dt}\vec{e}_i + x_i\frac{d\vec{e}_i}{dt}\,. \tag{13}$$

Итак, движение *начала* движущейся системы (точки S) учтено — это слагаемое $\vec{v}_S$. Следующие два слагаемых уже не связаны с движением начала S, и для прояснения их смысла точку S следует считать неподвижной.

Начнём с последнего слагаемого $x_i \frac{d\vec{e}_i}{dt}$ в формуле (13). Несмотря на то, что точка S неподвижна, S-система продолжает двигаться — она *вращается* с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг некоторой оси, проходящей через начало S (угловая скорость может при этом зависеть от времени, а ось вращения, вообще говоря, является мгновенной, то есть в следующий момент времени S-система может вращаться уже вокруг другой оси, проходящей через начало S). Следовательно, векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ вращаются вокруг своего начала с угловой скоростью $\vec{\omega}$, а в таком случае, как мы знаем из задачи 13,

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_i.$$

Тогда

$$x_i \frac{d\vec{e}_i}{dt} = x_i \vec{\omega} \times \vec{e}_i = \vec{\omega} \times (x_i \vec{e}_i) = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Перепишем с учётом этого формулу (13):

$$\vec{v}_0 = \frac{dx_i}{dt}\vec{e}_i + \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{14}$$

Осталось обсудить слагаемое $\frac{dx_i}{dt}\vec{e}_i$. Оно отвечает за скорость изменения координат точки в S-системе *при условии, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ неподвижны*. Но это есть не что иное, как относительная скорость $\vec{v}_{\text{отн}}$, то есть скорость точки m относительно S-системы. В самом деле, именно эту скорость зафиксирует наблюдатель, который движется вместе с S-системой и для которого S-система является неподвижной (этот наблюдатель не догадывается о движении S-системы; для него векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ «стоят на месте»).

Таким образом,

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Скорость точки в O-системе, как видим, складывается из её относительной скорости $\vec{v}_{\text{отн}}$ и *переносной скорости*

$$\vec{v}_{\text{пер}} = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{15}$$

Каков смысл переносной скорости? Легко видеть, что она не зависит от движения точки m и определяется *только движением S-системы*. Давайте остановим точку m в S-системе ($\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{0}$); тогда скорость точки m в O-системе будет равна $\vec{v}_0 = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_{\text{пер}}$. Следовательно, переносная скорость — это *скорость той точки S-системы, в которой сейчас находится точка m*; с такой скоростью точка m «переносилась» бы в O-системе, если бы покоилась в S-системе.

Смысл обоих слагаемых в выражении (15) для переносной скорости хорошо понятен: скорость точки S-системы с радиус-вектором $\vec{r}$ (в которой сейчас находится точка m) складывается из скорости поступательного движения вместе с началом отсчёта ($\vec{v}_S$) и скорости вращения вокруг оси, проходящей через начало отсчёта ($\vec{\omega} \times \vec{r}$).

Итак, скорость точки m в O-системе есть сумма относительной и переносной скоростей:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}.$$

Это есть классический *закон сложения скоростей*.

Задача 47. Покажите, что

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{16}$$

и объясните физический смысл данного равенства.

Задача 48. Дифференцируя по времени равенство (14) и используя формулу (16), докажите *теорему Кориолиса*:

$$\vec{a}_0 = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{кор}} + \vec{a}_{\text{пер}},$$

где

$$\vec{a}_{\text{отн}} = \frac{d^2 x_i}{dt^2} \vec{e}_i$$

есть *относительное ускорение*;

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн}}$$

есть *ускорение Кориолиса*;

$$\vec{a}_{\text{пер}} = \vec{a}_S + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

есть *переносное ускорение*. Объясните физический смысл каждого из трёх слагаемых в выражении для переносного ускорения.

Теперь вспоминаем про второй закон Ньютона $m\vec{a}_0 = \vec{F}$ и используем теорему Кориолиса:

$$m(\vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{кор}} + \vec{a}_{\text{пер}}) = \vec{F},$$

откуда

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{кор}} + \vec{F}_{\text{пер}}.$$

Здесь

$$\vec{F}_{\text{кор}} = -m\vec{a}_{\text{кор}} = -m \cdot 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн}} = 2m\vec{v}_{\text{отн}} \times \vec{\omega}$$

есть *сила Кориолиса*, а

$$\vec{F}_{\text{пер}} = -m\vec{a}_{\text{пер}} = -m\vec{a}_S - m\vec{\varepsilon} \times \vec{r} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

есть *переносная сила инерции*.

Вот и выяснилось, какие дополнительные слагаемые появляются в правой части (9) в качестве сил инерции. Наблюдателю в S-системе (относительно которого S-система покоится) кажется, что на точку m помимо силы $\vec{F}$ действуют ещё силы инерции $\vec{F}_{\text{кор}}$ и $\vec{F}_{\text{пер}}$. Однако, в отличие от «настоящей» силы $\vec{F}$, которая является результатом взаимодействия точки m с другими телами, силы инерции $\vec{F}_{\text{кор}}$ и $\vec{F}_{\text{пер}}$ не есть силы взаимодействия — они возникают только в результате ускоренного движения системы отсчёта. Что, впрочем, не даёт повода усомниться в их реальности: если вы сидите в автомобиле, разгоняющемся по прямому шоссе, то вас вжимает в спинку кресла вполне реальная сила $-m\vec{a}_S$ (она называется называется *поступательной силой инерции*); а если вы едете в автобусе и автобус резко поворачивает, то вас отбрасывает к стенке автобуса вполне реальная сила $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ (которая называется называется *центробежной силой инерции*).

Задача 49. Конический маятник, подвешенный к потолку неподвижной лаборатории, равномерно вращается по окружности. Покажите на рисунке направление центробежной силы инерции.

Задача 50. Поезд поворачивает по дуге окружности, а вы идёте вдоль вагона по ходу поезда. Покажите на рисунке направление приложенных к вам сил инерции: центробежной силы и силы Кориолиса.

Задача 51. Суточное вращение Земли приводит к тому, что отпущенное без начальной скорости свободно падающее тело отклоняется к востоку и к экватору. Попробуйте качественно объяснить этот факт. Убедитесь, что выражение для силы Кориолиса даёт правильное направление отклонения.

Задача 52. Обсудим реальную проблему железнодорожников. Рассмотрим двухколейную железную дорогу, проложенную в северном полушарии вдоль меридиана. Пусть мы смотрим вдоль неё на север; тогда по правой колее поезда ходят только на север, а по левой — только на юг. И вот оказывается, что на каждой колее один из рельсов изнашивается быстрее. Какой именно рельс и почему?

Задача 53. Посмотрите советский научно-популярный фильм «Силы инерции при вращательном движении». Осмыслите всё, о чём там рассказывается.