Уравнение колебаний. 1

Уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

можно получить из второго закона Ньютона $ma_x = F_x$.

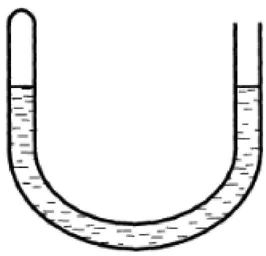
Задача 1. (*«Курчатов», 2014, 11*) Однородный цилиндрический поплавок массой m и площадью сечения S плавает вертикально в стакане с водой. Поплавок слегка утопили, а затем отпустили, в результате чего поплавок начал колебаться. Найдите период этих колебаний. Плотность воды ρ, ускорение свободного падения g.

$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}}}$

Задача 2. Найдите период малых колебаний жидкости в U-образной трубке постоянного сечения. Длина части сосуда, занятой жидкостью, равна l.

$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}}$

Задача 3. (*Всеросс., 1996, финал, 10*) В U-образную трубку с открытыми концами налили ртуть, после чего один из концов трубки запаяли (рис.). Затем ртуть вывели из состояния равновесия, в результате чего возникли малые колебания ртути в трубке. Найдите период этих колебаний, если известно, что масса ртути $m = 367$ г, её плотность $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, площадь поперечного сечения трубки $S = 1$ см^2, а высота столба воздуха в запаянном конце трубки равна $l = 1$ м. Внешнее атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Процесс считать изотермическим.

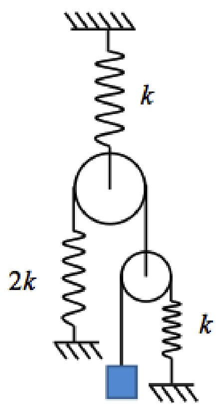


$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{(p_0 + 2\rho g l)S}} \approx 0{,}63 \text{ с}}$

Задача 4. На большой плоской пластине равномерно распределён отрицательный заряд с поверхностной плотностью σ. Однородный стержень массой m и длиной l, по которому равномерно распределён положительный заряд q, вставлен в небольшое отверстие пластины и может двигаться перпендикулярно пластине. Найдите период колебаний стержня. Размеры стержня много меньше размеров пластины. Силы тяжести нет.

$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon_0 m l}{\sigma q}}}$

Задача 5. (*МОШ, 2018, 11*) Найдите собственную частоту ω_0 и максимально возможную амплитуду $A_{\max}$ гармонических колебаний системы, изображённой на рисунке. Масса груза равна m. Блоки, пружины и нити невесомы, нити нерастяжимы, трения в осях блоков нет. Длины всех вертикальных участков нитей настолько велики, что не их длинами определяется максимальная амплитуда гармонических колебаний.



$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{19m}},\ A_{\max} = \frac{19mg}{k}}$

Задача 6. (*МОШ, 2016, 11*) Гладкий стержень длины L и массы M находится в невесомости. На стержень надета маленькая бусинка, масса которой гораздо меньше массы стержня. Определите период малых колебаний бусинки вблизи центра стержня. Гравитационная постоянная равна G.

$\boxed{T = \pi\sqrt{\frac{L^3}{2GM}}}$

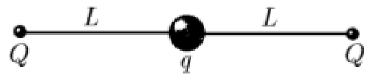
Задача 7. Два груза массами m_1 и m_2, соединённые пружиной жёсткостью k, находятся на гладкой горизонтальной поверхности. Найдите период малых колебаний этой системы.

$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1+m_2)}}}$

Задача 8. (*Всеросс., 2017, РЭ, 11*) В глубинах вселенной вдали от всех тяготеющих масс находится тонкий однородный стержень длины $L = 10$ м и массой $M = 1{,}0$ кг. По нему без трения может скользить бусинка массой $m = 0{,}1$ кг. В начальный момент бусинка слегка смещена относительно центра стержня и система неподвижна. Через какое время τ бусинка впервые достигнет середины стержня? Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2.

$\boxed{\tau = \frac{\pi L}{4}\sqrt{\frac{L}{2G(M+m)}} \approx 2 \cdot 10^6 \text{ с}}$

Задача 9. Бусинка с положительным зарядом q может двигаться без трения по натянутой нити длины $2L$, на концах которой закреплены положительные заряды Q. Найдите период малых колебаний бусинки, если её масса равна m.



$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 m L^3}{qQ}}}$

Задача 10. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2015, 10–11*) Два маленьких шарика с зарядами $+q$ каждый надеты на непроводящий вертикальный стержень. Нижний шарик закреплён, а верхний может свободно скользить по стержню. Расстояние между шариками в положении равновесия равно L. Найдите период малых колебаний верхнего шарика. Трением пренебречь. Ускорение свободного падения g.

$\boxed{T = \pi\sqrt{\frac{2L}{g}}}$

Задача 11. Два одинаковых маленьких шарика с зарядами $\pm q$ жёстко связаны невесомым стержнем длины l и находятся в однородном электрическом поле E. Стержень может вращаться без трения вокруг своего центра. Масса шарика равна m.

а) Опишите положение устойчивого равновесия системы. Найдите период малых колебаний системы относительно положения устойчивого равновесия.

б) Найдите максимальную скорость шариков, если амплитуда малых колебаний шариков равна x_0.

$\boxed{\text{а) } T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{2qE}}\text{; б) } v_0 = x_0\sqrt{\frac{2qE}{ml}}}$

Задача 12. Определите время полёта камня от одного полюса Земли до другого по прямому тоннелю, прорытому через центр. Плотность Земли считать постоянной. Радиус Земли принять равным $R = 6400$ км.

$\boxed{\tau = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 42 \text{ мин}}$

Задача 13. (*МФТИ, 1995*) В модели атома Томсона предполагалось, что положительный заряд q, равный по модулю заряду электрона, равномерно распределён внутри шара радиуса R. Чему будет равен период колебаний (внутри шара вдоль диаметра) электрона, помещённого в такой шар? Масса электрона m.

$\boxed{T = \frac{4\pi R}{q}\sqrt{\pi\varepsilon_0 R m}}$

Задача 14. (*МФТИ, 2003*) В проекте из области фантастики предлагается прорыть между Москвой и Парижем прямолинейный железнодорожный тоннель длиной $S = 2400$ км. Вагон ставят на рельсы в начале тоннеля в Париже и отпускают без начальной скорости.

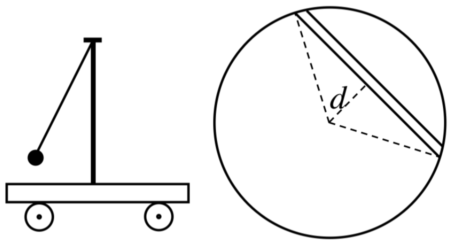
1) Через какое время вагон достигнет середины тоннеля?

2) Найдите скорость вагона в середине тоннеля.

Землю считать шаром радиуса $R = 6400$ км с одинаковой плотностью по всему объёму. Вращение Земли, сопротивление воздуха и все виды трения при движении не учитывать.

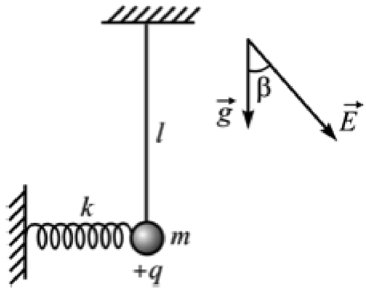
$\boxed{1)\ \tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 21 \text{ мин; } 2)\ v = \frac{S}{2}\sqrt{\frac{g}{R}} \approx 1{,}5 \text{ км/с}}$

Задача 15. (*«Росатом», 2020, 11*) На тележке укреплен математический маятник длины l. Тележку отпускают в туннель, прокопанный внутри Земли по такой хорде, что минимальное расстояние от центра Земли до туннеля равно половине радиуса Земли: $d = \frac{R}{2}$ (R — радиус Земли; см. рисунок). Сколько колебаний совершит маятник за то время, когда тележка пройдет весь туннель? Радиус и масса Земли R и ускорение свободного падения на поверхности Земли известны. Плоскость колебаний маятника совпадает с направлением движения тележки.



$\boxed{N = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{2l}}}$

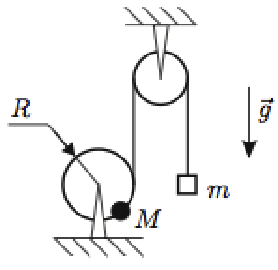
Задача 16. (*МОШ, 2011, 11*) На тонкой непроводящей нити длиной l подвешен маленький шарик массой m, который заряжен зарядом $+q$. Слева к шарику прикреплена непроводящая пружинка жёсткостью k, расположенная горизонтально. Шарик находится в однородном электрическом поле E, направленном так, как показано на рисунке. В состоянии равновесия нить с шариком висит вертикально. Найти период малых колебаний шарика в плоскости рисунка.



$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g}{l} + \frac{qE\cos\beta}{ml}}}}$

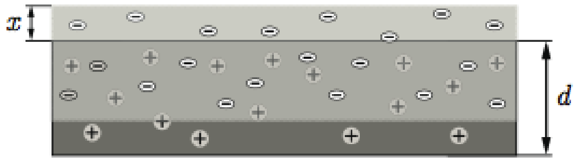
Задача 17. (*Всеросс., 2013, РЭ, 11*) Два лёгких блока соединены нерастяжимой лёгкой нитью (см. рисунок). На краю нижнего блока радиуса R закреплена точечная масса M, соединённая с нитью. К другому концу нити прикреплён груз m, причём $M > m$.

Найдите период T малых колебаний системы около положения равновесия.



$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\sqrt[4]{\frac{M+m}{M-m}}}$

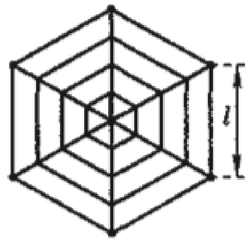
Задача 18. (*МОШ, 2019, 11*) Частоту колебаний пространственного заряда в плазме (ионизованном газе) можно определить на основании следующих модельных представлений. Имеется слой плазмы в виде прямоугольного параллелепипеда. Концентрация ионов с зарядом $+e$ равна n и равна концентрации электронов. Ионы и электроны в слое распределены однородно. Можно считать, что слой электронов накладывается на слой ионов. Толщина слоя d много меньше других его линейных размеров. При малом смещении x ($x \ll d$) слоя электронов в направлении нормали к слою (рис.) возникают малые колебания.



Определите угловую частоту ω этих колебаний. Считайте, что однородность распределения зарядов не нарушается, концентрация не меняется, ионы (поскольку они тяжёлые) — неподвижны. Масса электрона равна m_e, его заряд равен e.

$\omega = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e\varepsilon_0}}$

Задача 19. (*Всеросс., 2006, ОЭ, 11*) Паук сплёл паутинку в виде правильного шестиугольника со стороной $l = 45$ см (рис.) и закрепил крайние точки радиальных нитей радиусом $r = 0{,}01$ мм так, что сила их натяжения оказалась равна $F_0 = 6$ мН. Считайте деформации паутины упругими, а её модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^8$ Па. При относительном удлинении, превышающем $\varepsilon_{\max} = 0{,}2$, нить паутины рвётся.

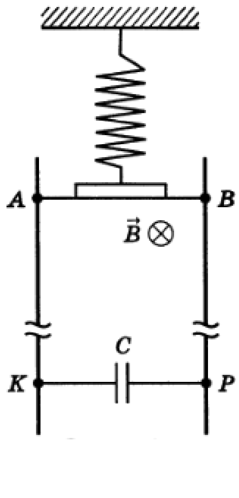


1) Найдите максимальную массу M мухи, которая, попав в паутину, не порвёт её, если скорость мухи $v = 2$ м/с. Считайте, что муха попадает в центр паутины перпендикулярно её плоскости.

2) В центр паутины попалась муха массой $m = 0{,}1$ г. Найдите период T малых колебаний мухи вдоль перпендикуляра к плоскости паутины. Попав в паутину, махать крыльями муха не может.

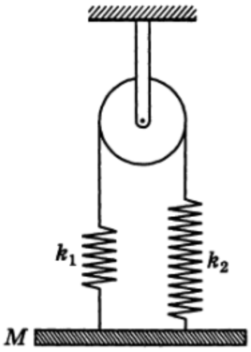
1) $M = \frac{6\pi r^2 El}{v^2}\left(\varepsilon_{\max}^2 - \left(\frac{F_0}{\pi r^2 E}\right)^2\right) \approx 1{,}3$ г; 2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{6F_0}} \approx 0{,}22$ с

Задача 20. (*Всеросс., 1996, ОЭ, 11*) На пружинке жёсткости k висит груз (рис.). К грузу прикреплена горизонтально расположенная медная рейка AB длины l. Рейка может скользить без трения по неподвижным вертикальным проводящим рельсам AK и BP, имея с ними хороший электрический контакт. К рельсам с помощью проводов подсоединён конденсатор ёмкости C. Система находится в однородном магнитном поле, вектор индукции $\vec{B}$ которого перпендикулярен рейке и рельсам. Найдите период вертикальных колебаний груза. Масса груза с рейкой равна m. Сопротивление рейки, рельсов и проводов можно не учитывать.



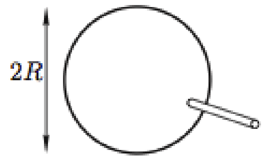
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+B^2l^2C}{k}}$

Задача 21. (*Всеросс., 1995, финал, 11*) Определите период колебаний однородного бруска, подвешенного на двух пружинах, жёсткости которых равны k_1 и k_2 соответственно ($k_1 > k_2$). Пружины связаны нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок (рис.). Масса бруска равна M. При колебаниях брусок все время остаётся горизонтальным.



$T = 2\pi\sqrt{\frac{M(k_1+k_2)}{4k_1k_2}}$

Задача 22. (*Всеросс., 2008, финал, 11*) Через короткую трубку выдувают мыльный пузырь массой $m = 0{,}01$ г и коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma = 0{,}01$ Н/м (рис.). Пузырь заряжают зарядом $Q = 5{,}4 \cdot 10^{-8}$ Кл. Трубка остаётся открытой.



1) Определите равновесный радиус пузыря R_0.

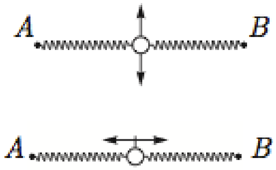
2) Определите период малых колебаний пузыря, если при колебаниях он сохраняет сферическую форму.

3) Оцените, с какой скоростью разлетятся брызги, если пузырь внезапно зарядить зарядом $Q_1 = 10Q$.

Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл^2/(Дж · м).

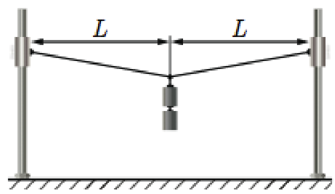
1) $R_0 = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{128\pi^2\varepsilon_0\sigma}} \approx 3{,}0$ см; 2) $T = \sqrt{\frac{\pi m}{12\sigma}} \approx 16$ мс; 3) $v = \frac{10Q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 R_0 m}} \approx 94$ м/с

Задача 23. (*Всеросс., 2014, финал, 11*) Тонкую невесомую пружину, растянутую на некоторую величину Δl_1, закрепили на гладком горизонтальном столе в точках A и B. Отношение периодов малых поперечных (верхний рисунок) и продольных (нижний рисунок) колебаний небольшого грузика, расположенного посередине пружины, равно $n_1 = 4$. После того как деформацию пружины увеличили на $\Delta x = 3{,}5$ см, отношение периодов стало равно $n_2 = 3$. Найдите длину нерастянутой пружины l_0, а также значение деформации Δl_1 в первом и деформации Δl_2 во втором случаях. Считайте, что пружина в условиях опыта подчиняется закону Гука.



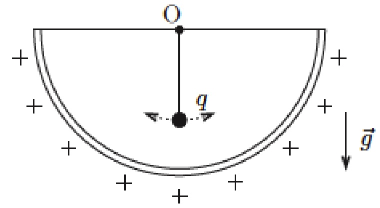
$l_0 = \frac{(n_1^2-1)(n_2^2-1)}{n_1^2-n_2^2}\Delta x = 60$ см; $\Delta l_1 = \frac{n_2^2-1}{n_1^2-n_2^2}\Delta x = 4$ см; $\Delta l_2 = \frac{n_1^2-1}{n_1^2-n_2^2}\Delta x = 7{,}5$ см

Задача 24. (*МОШ, 2019, 11*) Концы натянутой металлической струны располагаются на одинаковой высоте на расстоянии $2L$ друг от друга. К середине струны подвешивают два груза одинаковой массы (см. рис.), при этом сила натяжения струны изменяется на пренебрежимо малую величину. В некоторый момент времени нижний груз отрывается от верхнего, после чего возникают малые колебания. Положение равновесия образовавшейся системы оказывается выше исходного положения равновесия на величину x_0, при этом $x_0 \ll L$. Найдите период колебаний груза около нового положения равновесия.



$T = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}}$

Задача 25. (*Всеросс., 2015, финал, 11*) По поверхности закреплённой диэлектрической полусферы равномерно распределён положительный электрический заряд. Ось симметрии полусферы вертикальна. В точке О, совпадающей с центром кривизны полусферы, закреплён математический маятник в виде небольшого шарика с зарядом q_1, висящего на нити, длина которой меньше радиуса полусферы (см. рисунок). Период гармонических колебаний шарика вблизи положения равновесия, в котором нить вертикальна, равен T. После того, как заряд шарика изменили так, что он стал равен q_2, причём $|q_2/q_1| = 2$, период гармонических колебаний шарика вблизи нового положения равновесия, в котором нить тоже вертикальна, снова оказался равным T. Найдите числовое значение T, если известно, что период гармонических колебаний маятника в незаряженной чаше $T_0 = 1{,}0$ с. Поле поляризационных зарядов не учитывайте.



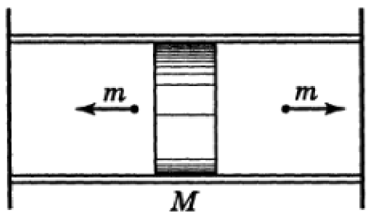
Если $q_1 > 0$, то $T = T_0\sqrt{3} = 1{,}73$ с; если $q_1 < 0$, то $T = T_0/\sqrt{3} = 0{,}58$ с

Задача 26. (*Всеросс., 2017, финал, 11*) Заряд Q равномерно распределён по поверхности диэлектрической тонкостенной закреплённой трубы радиуса R и длиной H. Бусинка с тем же по знаку зарядом может свободно скользить по тонкой непроводящей спице, совпадающей с диаметром серединного (равноудаленного от торцов) сечения.

Найдите период T малых колебаний бусинки относительно положения равновесия. Удельный заряд бусинки $\gamma = q/m$ считать известным.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{8\pi\varepsilon_0}{\gamma Q}\left(R^2 + \frac{H^2}{4}\right)^{3/2}}$

Задача 27. (*Всеросс., 1996, финал, 11*) В горизонтальном неподвижном цилиндре, закрытом с обоих концов, находится поршень, масса которого равна M (рис.). Поршень может двигаться в цилиндре без трения. Равновесное положение поршня находится в центре цилиндра. Между поршнем и торцами цилиндра в плоскости среднего сечения летают в горизонтальном направлении два маленьких шарика, имеющие одинаковую массу m ($m \ll M$). Частота столкновений каждого шарика с поршнем, находящимся в равновесии, равна f. Если поршень медленно сместить из положения равновесия на малое расстояние, то он начнет совершать гармонические колебания. Считая удары шариков абсолютно упругими, определите период этих колебаний.



Указание. При $x \ll 1$ выражение $(1 + x)^n \approx 1 + nx$.

$T = \frac{\pi}{f}\sqrt{\frac{M}{6m}}$

Задача 28. (*IPhO, 2014*)[1] В вакууме находится мыльный пузырь радиуса $r = 5{,}00$ см и толщиной стенок $h = 10{,}0$ мкм, внутри которого содержится двухатомный идеальный газ. Коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки $\sigma = 4{,}00 \cdot 10^{-2}$ Н/м, её плотность $\rho = 1{,}10$ г/см^3.

1) Выведите формулу и рассчитайте молярную теплоёмкость C газа в мыльном пузыре. Считайте, что газ нагревается так медленно, что пузырь всё время находится в состоянии механического равновесия.

2) Найдите и рассчитайте циклическую частоту ω малых радиальных колебаний пузыря. Считайте, что теплоёмкость мыльной пленки много больше теплоёмкости газа в пузыре и тер-

[1] Первое задание на IPhO-2014 состояло из трёх независимых задач, и это — одна из них.

модинамическое равновесие внутри пузыря устанавливается гораздо быстрее, чем период колебаний.

Подсказка: Лаплас показал, что разница давлений внутри и снаружи искривленной поверхности между жидкостью и газом, вызванная поверхностным натяжением, равна $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$.

$\boxed{\text{1) } C = 4R\text{; 2) } \omega = \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho h r^2}} = 108 \text{ рад/с}}$