Уравнение адиабаты

Задача 1. Выведите уравнение адиабаты $pV^\gamma = \mathrm{const}$, где $\gamma = C_p/C_V$.

Указание. $0 = \delta Q = dU + \delta A = \nu C_V dT + pdV = \nu C_V dT + \frac{\nu RT}{V} dV \Rightarrow \frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V}\frac{dV}{V} = 0$, и интегрируем.

Задача 2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11*) Точка K — это точка на pV-диаграмме, описывающая состояние постоянного количества одноатомного идеального газа. Угол наклона изотермы в этой точке к оси V равен α. Каков угол наклона адиабаты в этой же точке к оси V? Ответ обосновать.

$\boxed{\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}\operatorname{tg}\alpha\right)}$

Задача 3. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2017, 10–11*) $\nu = 2$ моля неона сначала адиабатически сжали, совершив над ним работу $A = 2$ Дж, а затем изохорически нагрели, сообщив ему количество теплоты $Q = 3$ Дж. В результате давление неона увеличилось на 0,1%. Найти с ошибкой не более 3 К начальную температуру неона. Универсальная газовая постоянная $R \approx 8{,}31$ Дж/(моль · К).

$\boxed{T_0 = \frac{5A+2Q}{3\nu R}\left(\frac{\delta p}{p}\right)^{-1} \approx 321\ \text{К}}$

Задача 4. (*МФТИ, 1999*) Моль гелия из начального состояния с температурой $T = 300$ К расширяется в адиабатическом процессе так, что относительные изменения давления $\Delta p/p$, объёма $\Delta V/V$ и температуры газа $\Delta T/T$ малы. Найти работу A, совершённую газом, если относительное изменение его давления $\Delta p/p = -1/120$.

$\boxed{A = -\frac{3}{5}RT\frac{\Delta p}{p} = 12{,}5\ \text{Дж}}$

Задача 5. (*МФТИ, 1999*) Моль гелия сжимают в адиабатическом процессе так, что относительные изменения давления $\Delta p/p$, объёма $\Delta V/V$ и температуры $\Delta T/T$ газа малы. На сколько процентов изменяется давление газа, если относительное изменение температуры $\Delta T/T = 0{,}0032$?

$\boxed{\frac{\Delta p}{p} = \frac{5}{2}\frac{\Delta T}{T} = 0{,}008;\ \text{давление увеличивается на } 0{,}8\%}$

Задача 6. (*МФТИ, 2008*) Теплоизолированный горизонтальный цилиндр с гладкими стенками делится не проводящим теплоту поршнем на два объёма, в которых находится по одному молю гелия при температуре $T_0 = 200$ К. В левой части цилиндра на некоторое время включается нагреватель. Поршень перемещается. В конечном состоянии температуры в левой и правой частях цилиндра отличаются в три раза. Найдите количество теплоты Q, переданное нагревателем газу. Известно, что давление p и объём V газа в правой части цилиндра связаны соотношением $p^3V^5 = \mathrm{const}$ (адиабатический процесс).

$\boxed{Q = 3\left(\sqrt[3]{32} - 1\right)\nu RT_0 \approx 11\ \text{кДж}}$

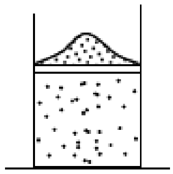
Задача 7. (*МФТИ, 2008*) Теплоизолированный горизонтальный цилиндр с гладкими стенками делится не проводящим теплоту поршнем на два объёма, в которых находится по одному молю гелия при температуре $T_0 = 300$ К. В левой части цилиндра на некоторое время включается нагреватель. В результате поршень перемещается, и газ, содержащийся в левой части цилиндра, совершает работу $A = 1245$ Дж. Найти отношение α конечных объёмов газа в левой и правой частях цилиндра. Известно, что давление p и объём V газа в правой части цилиндра связаны соотношением $p^3V^5 = \text{const}$ (адиабатический процесс).

$\boxed{\alpha = 2\left(1 + \frac{2A}{3\nu RT_0}\right)^{3/2} - 1 \approx 2}$

Задача 8. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Для адиабатического увеличения давления $\nu = 2$ молей гелия на 0,5% потребовалось совершить над гелием работу $A = 12{,}46$ Дж. Найти начальную температуру гелия. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

$\boxed{T_0 = \frac{1000A}{3\nu R} = 250\ \text{К}}$

Задача 9. (*«Росатом», 2016, 11*) В теплоизолированном сосуде под массивным поршнем, на котором лежит куча песка, находится одноатомный идеальный газ. Объём газа V, давление p. Песок (по одной песчинке) снимают с поршня, и объём газа медленно увеличивается вдвое. Какой была бы кинетическая энергия поршня в тот момент, когда объём газа вырос вдвое, если бы песок сняли с поршня весь сразу? Атмосферное давление отсутствует.



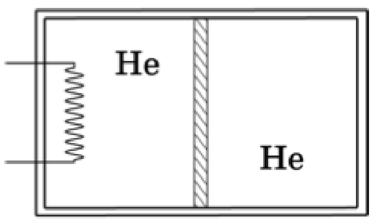
Указание. В адиабатическом процессе давление и объём идеального газа связаны соотношением $pV^\gamma = \text{const}$, где γ — известное число ($\gamma > 1$).

$\boxed{K = pV\left(\frac{3}{2} - 2^{2-\gamma}\right)}$

Задача 10. (*МОШ, 2010, 11*) Горизонтальный сосуд с идеальным одноатомным газом разделён на две части подвижным вертикальным поршнем, не проводящим тепло. Вначале давление в сосуде было равно p_0, а температура — T_0. Нагревая газ в левой части сосуда до температуры $T_0 + \Delta T$, исследуют зависимость давления в системе p от параметра $x = \Delta T/T_0$. Эта зависимость при малых x оказалась линейной: $p = p_0(1 + \alpha x)$ с параметром $\alpha = 0{,}5$. Найдите отношение $k = \nu_1/\nu_2$ количеств газа в левой и правой частях сосуда. Процесс в правой части сосуда адиабатный, трением между поршнем и стенками сосуда можно пренебречь.

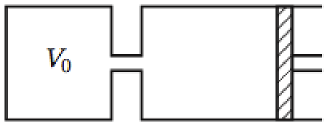
$\boxed{k = \frac{3\alpha}{5(1-\alpha)} = \frac{3}{5}}$

Задача 11. (*Всеросс., 2019, РЭ, 11*) Теплоизолированный цилиндрический сосуд разделён на две части не проводящим тепло поршнем, который может перемещаться без трения. В начальный момент в левой и правой частях сосуда находится по одному молю гелия при одинаковой температуре. В левую часть сосуда подвели тепло с помощью нагревателя. При этом температура гелия в ней увеличилась на **малую величину** ΔT. Определите изменение температуры ΔT_2 в правой части сосуда и количество теплоты Q, переданное нагревателем.



$\boxed{\Delta T_2 = \frac{\Delta T}{4};\ Q = \frac{15}{8}R\Delta T}$

Задача 12. (*Всеросс., 2006, финал, 11*) На рисунке изображена система, состоящая из баллона объёмом $V_0 = 0{,}2$ м^3 и цилиндра с поршнем. Начальный объём баллона и цилиндра $V_1 = kV_0$, где $k = 2{,}72$. В системе находится воздух под давлением $p_0 = 10^5$ Па и при температуре $T_0 = 300$ К, равной температуре наружного воздуха. Передвигая поршень, весь воздух из цилиндра закачивают в баллон. Определите количество теплоты, которое передаётся окружающей среде в следующих двух случаях.



1) Поршень передвигается медленно, так что в каждый момент времени вся система находится в тепловом равновесии с окружающей средой.

2) Поршень передвигается достаточно быстро, так что за время его перемещения можно пренебречь теплообменом с окружающей средой, но воздух внутри системы в каждый момент времени находится в равновесном состоянии. После завершения процесса перекачки темепратура воздуха в баллоне постепенно сравнивается с темпертурой окружающего воздуха.

Примечание. Адиабатический процесс описывается уравнением $pV^\gamma = \mathrm{const}$, где параметр $\gamma = 7/5$.

1) $Q_1 = p_0V_0k\ln k = 54{,}4$ кДж; 2) $Q_2 = \frac{p_0V_0k}{\gamma-1}\left(k^{\gamma-1}-1\right) = 66{,}9$ кДж

Задача 13. (*Всеросс., 2008, финал, 11*) Первое устройство, вырабатывающее электричество для бакена за счёт энергии морских волн, было создано в 1964 году. Схема бакена показана на рисунке. Воздух сначала засасывается при опускании поршня через клапан K_2, затем сжимается и впускается в рабочую полость через клапан K_1. Когда поверхность воды опускается, клапан K_1 закрыт, а клапан K_2 открыт. За один раз засасывается $V_1 = 0{,}233$ м^3 воздуха при давлении $p_1 = 1{,}0\cdot10^5$ Па и температуре $t_1 = 7\,^\circ$C.

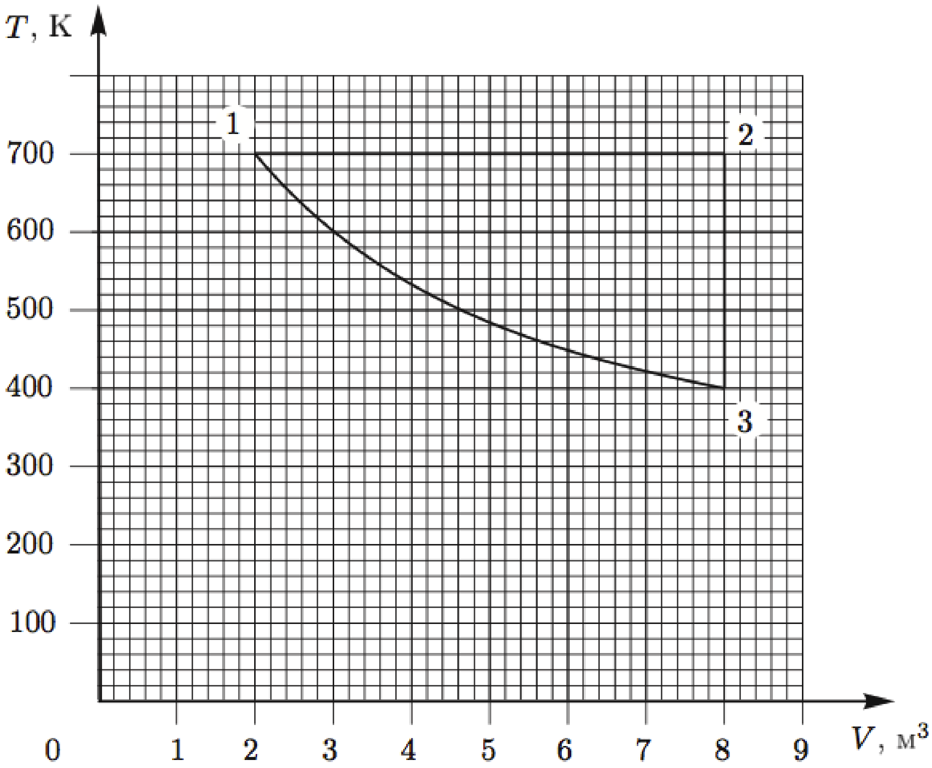
Когда поверхность воды начинает подниматься, клапан K_2 закрывается, и воздух адиабатически сжимается поршнем до давления $p_2 = 6{,}0\cdot10^5$ Па. После этого открывается клапан K_1, и поршень продолжает двигаться вверх до тех пор, пока весь воздух не будет вытолкнут в рабочую полость. При этом воздух в рабочей полости приводит в движение турбину и генератор, вырабатывающий электричество. После открытия клапана K_1 давление воздуха над поршнем остаётся приблизительно неизменным.

Пренебрегая массой поршня и трением между поршнем и стенкой, определите, какую работу за один цикл совершает вода при подъёме поршня.

Воздух можно считать идеальным двухатомным газом, для которого $\gamma = C_p/C_V = 7/5$. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль $\cdot$ К).

$A = \frac{p_1V_1}{\gamma-1}\left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right) + p_2V_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 77{,}8$ Дж

Задача 14. (*Всеросс., 2003, финал, 11*) С молем идеального газа произвели замкнутый цикл (рис.), где 3–1 — адиабата. Определите максимальное давление газа за цикл $p_{\max}$, его теплоёмкость C_V при постоянном объёме и вычислите (с точностью большей, чем даёт прямое измерение по графику) «тангенс» угла (К/м^3) между изотермой и адиабатой в точке 1 на (T, V) плоскости.



$p_{\max} = 2{,}9$ кПа; $C_V = 20{,}5 \pm 0{,}2$ Дж/(моль · К); $\operatorname{tg}\alpha = 141{,}8 \pm 1{,}4$ К/м^3

Задача 15. (*МОШ, 2019, 11*) Адиабатический процесс для идеального газа описывается уравнением $pV^\gamma = \text{const}$, где p — давление, V — объём, γ — безразмерная величина, называемая показателем адиабаты. Для определения γ ставят следующий эксперимент. Стеклянный баллон заполняют исследуемым газом и измеряют его давление p_1, большее атмосферного давления p_0. При этом температура в баллоне равна температуре в комнате. Затем на короткое время открывают кран и часть газа выходит из баллона. Можно считать, что при открытом кране оставшийся в баллоне газ расширяется адиабатически. Кран закрывают, когда давление в баллоне становится равно p_0. После этого дожидаются выравнивания температур в баллоне и комнате и измеряют давление в баллоне p_2 в конечном состоянии. Определите γ, если $p_0 = 10^5$ Па, $p_1 = 1{,}060 \cdot 10^5$ Па, $p_2 = 1{,}017 \cdot 10^5$ Па.

Примечание. Возможно, окажется полезной приближённая формула $(1+x)^n \approx 1 + nx$, $x \ll 1$.

$\gamma \approx \frac{p_1 - p_0}{p_1 - p_2} \approx 1{,}4$

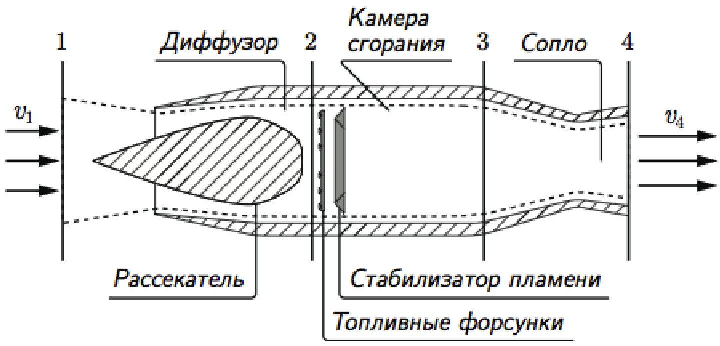
Задача 16. (*МОШ, 2019, 11*) На рис. изображена схема прямоточного воздушно-реактивного двигателя (ПВРД), который используется на некоторых типах ракет в качестве маршевого (включающегося после разгона ракеты) двигателя. Воображаемые плоскости 1, 2, 3, 4 делят двигатель на три области: диффузор, камера сгорания и сопло. Скорость потока воздуха относительно двигателя на выходе из сопла возрастает по сравнению со скоростью на входе в диффузор за счёт подвода тепла в камере сгорания.

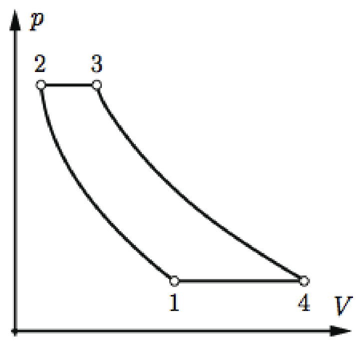
Обозначим v (с разными индексами) — скорость воздуха относительно двигателя, u — скорость ракеты относительно Земли. Термодинамические параметры воздуха вдали от двигателя, где воздух практически покоится: $p_0 = 35$ кПа, $T_0 = 230$ К. Воздух считается двухатомным газом, для которого: $\mu = 29$ г/моль, $c_V = 2{,}5R$, где $R = 8{,}3$ Дж/(моль$\cdot$К), $c_0 = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{\mu}}$ — скорость звука в воздухе с температурой T_0, $\gamma = \frac{c_V + R}{c_V} = \frac{7}{5}$ — показатель адиабаты. Число Маха M, являющееся параметром задачи, задаёт скорость ракеты $u = \mathrm{M} c_0$.

В задаче рассматривается упрощённая модель, в которой предполагается, что процессы сжатия воздуха в диффузоре и расширения в сопле — адиабатические, а процесс нагревания в камере сгорания (после впрыскивания и воспламенения топлива) — изобарный. Скорость воздуха относительно двигателя в камере сгорания пренебрежимо мала по сравнению с v_1 и v_4. Предполагается, что в каждой точке любого поперечного сечения потока внутри двигателя термодинамические параметры воздуха (p, ρ, T) и его скорость одинаковые. Считается, что масса продуктов сгорания, образующихся в камере сгорания в единицу времени, пренебрежимо мала по сравнению с массой воздуха, проходящей через камеру сгорания в единицу времени. Для любых двух сечений A и B справедливо уравнение термодинамики потока

$$\frac{v_B^2 - v_A^2}{2} + (c_V + R)\frac{T_B - T_A}{\mu} = q,$$

где v_B и v_A — скорости воздуха в сечениях B и A , T_B и T_A — соответствующие температуры, q — количество теплоты, передаваемое единице массы потока между сечениями A и B. Предполагается, что в сечении 1: $v_1 = u$, $p_1 = p_0$, $T_1 = T_0$. Цикл Брайтона, состоящий из двух адиабат и двух изобар (рис.), условно моделирует происходящие с порцией воздуха в двигателе процессы. Для адиабатического квазистатического процесса справедливо соотношение $pV^\gamma = \mathrm{const}$.





1. Определите температуру $T_2(M)$ в сечении 2 как функцию числа Маха M.

   Пусть $q_0 = A c_0^2$ — количество теплоты, передаваемое единице массы воздуха в камере сгорания, $A = 2{,}5$.

2. Найдите T_3(M).

3. Определите T_4(M).

4. Определите v_4(M).

5. Пусть S — площадь потока в сечении 1, получите формулу для мощности двигателя для числа Маха M $= 1$.

6. Определите КПД двигателя для числа Маха M $= 1$ (должно получиться число).

См. конец листка

Ответ к задаче 16

1) $T_2(\mathrm{M}) = T_0\left(\frac{\mathrm{M}^2}{5} + 1\right)$;

2) $T_3(\mathrm{M}) = T_0\left(\frac{\mathrm{M}^2}{5} + 2\right)$;

3) $T_4(\mathrm{M}) = T_0\frac{\mathrm{M}^2+10}{\mathrm{M}^2+5}$;

4) $v_4 = c_0\sqrt{\frac{\mathrm{M}^2+10}{\mathrm{M}^2+5}}$;

5) $N \approx 0{,}7 p_0 S c_0$;

6) $\eta \approx \frac{2}{5} \cdot \frac{0{,}7 p_0}{\rho_0 c_0^2} = 20\%$