Упругие взаимодействия

При упругом взаимодействии тел (в частности, при упругом ударе) не происходит изменений в их внутреннем состоянии; внутренняя энергия тел не меняется, а значит — сохраняется их суммарная механическая энергия.

Кроме того, обычно сохраняется также импульс системы или его проекция на некоторую ось. Поэтому в задачах на упругие взаимодействия нужно решать систему уравнений, выражающих законы сохранения импульса и энергии.

Центральный удар

В задачах на столкновения помимо исходной неподвижной системы отсчёта (которая называется также *лабораторной*, сокращённо ЛСО) бывает удобно использовать систему отсчёта, связанную с центром масс (СЦМ). В чём удобство СЦМ? Смотрите задачу 1.

Задача 1. Два тела двигаются вдоль одной прямой: тело массы m_1 — со скоростью v_1, тело массы m_2 — со скоростью v_2.

1) Покажите, что в СЦМ импульсы этих тел равны по модулю и противоположны по направлению.

2) Покажите, что в результате упругого центрального удара импульсы тел в СЦМ меняют направления на противоположные, оставаясь неизменными по абсолютной величине.

Задача 2. Шар, движущийся поступательно со скоростью v_0 по горизонтальной поверхности, налетает на такой же покоящийся шар. Происходит упругий центральный удар. Найдите скорости шаров после удара. Решите задачу в ЛСО и СЦМ.

$\boxed{v_1 = 0,\ v_2 = v_0}$

Задача 3. Шар массой m, движущийся со скоростью v_0, налетает на покоящийся шар массой M. Происходит упругий центральный удар. Найдите скорости шаров после удара. Решите задачу в ЛСО и СЦМ.

$\boxed{v_1 = \frac{m-M}{m+M}v_0,\ v_2 = \frac{2m}{m+M}v_0}$

Задача 4. Шар массой m_1, движущийся со скоростью v_1, упруго сталкивается с шаром массой m_2, движущимся со скоростью v_2. Удар центральный. Найдите скорости u_1 и u_2 шаров после удара. Решите задачу в ЛСО и СЦМ.

Указание. Записав в ЛСО систему ЗСИ и ЗСЭ, не торопитесь выражать u_1 или u_2 из ЗСИ. Сначала перегруппируйте оба уравнения, собрав в левых частях слагаемые с m_1, а в правых — с m_2. Дальше станет понятно, что нужно сделать; заодно вы получите любопытный результат.

$\boxed{u_1 = \frac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2},\ v_2 = \frac{2m_1v_1+(m_2-m_1)v_2}{m_1+m_2}}$

Задача 5. (*Всеросс., 2005, ОЭ, 9*) Небольшая шайба, движущаяся со скоростью v_1 по гладкой горизонтальной поверхности, налетает на вторую шайбу, лежащую неподвижно, и после абсолютно упругого удара отскакивает со скоростью v_2 в противоположном направлении. Найдите скорость V второй шайбы после удара. Массы шайб не заданы, но известно, что они различны.

$\boxed{V = v_1 - v_2}$

[Овчинкин] → 4.67, 4.73, 4.75, 4.80, 4.86, 4.92.

Задача 6. (*«Физтех», 2020, 9*) Две шайбы, скорости которых $V_1 = 2$ м/с и $V_2 = 3$ м/с, движутся навстречу друг другу по гладкой горизонтальной плоскости и испытывают абсолютно упругий центральный удар. Массы шайб $m_1 = 0{,}3$ кг и $m_2 = 0{,}2$ кг.

1. Найдите максимальную энергию E деформации шайб в процессе соударения.
2. Через какое время T после соударения расстояние между шайбами будет равно $L = 2$ м?

1) $E = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} = 1{,}5$ Дж; 2) $T = \frac{L}{V_1+V_2} = 0{,}4$ с

Задача 7. (*МФТИ, 1993*) Брусок, двигавшийся по горизонтальной поверхности стола со скоростью v_0, сталкивается с неподвижным бруском вдвое большей массы. На какое расстояние разъедутся бруски после столкновения? Удар упругий, центральный. Коэффициенты трения брусков о стол одинаковы и равны μ.

$L = \frac{5v_0^2}{18\mu g}$

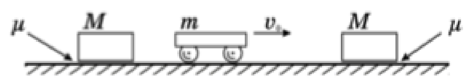
Задача 8. (*МФТИ, 1993*) Брусок, двигавшийся по горизонтальной поверхности стола со скоростью v_0, сталкивается с неподвижным бруском вчетверо меньшей массы. На какое расстояние разъедутся бруски после столкновения? Удар упругий, центральный. Коэффициенты трения брусков о стол одинаковы и равны μ.

$L = \frac{11v_0^2}{10\mu g}$

Задача 9. (*«Курчатов», 2017, 10*) Два маленьких бруска движутся по горизонтальной поверхности стола навстречу друг другу. Масса первого бруска $m_1 = m$, масса второго — $m_2 = 2m$. Бруски сталкиваются. На какое расстояние L разъедутся бруски после удара? Непосредственно перед ударом модуль скорости первого бруска равен $v_1 = 2v$, второго бруска — $v_2 = v$. Удар абсолютно упругий и лобовой, движение брусков поступательное. Коэффициенты трения брусков о стол одинаковы и равны μ, ускорение свободного падения g.

$L = \frac{5v^2}{2\mu g}$

Задача 10. (*Всеросс., 2018, РЭ, 10*) На горизонтальной поверхности покоятся два бруска массой M каждый. Между брусками помещают тележку массой m ($m = M/3$) и сообщают ей начальную скорость v_0. Найдите, насколько сдвинутся бруски в результате абсолютно упругих столкновений с тележкой, если за время между столкновениями они успевают останавливаться. Время соударения тележки с брусками бесконечно мало. Коэффициент трения между брусками и полом равен μ. Ускорение свободного падения g.

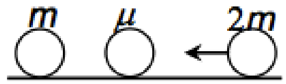


Правый — на $\frac{2v^2}{15\mu g}$, левый — на $\frac{v^2}{30\mu g}$

Задача 11. (*МОШ, 2016, 11*) Вдоль гладкой горизонтальной поверхности скользит шар неизвестной массы в направлении другого покоящегося шара массой 120 г. В некоторый момент времени происходит абсолютно упругое лобовое соударение этих шаров, в результате которого первый шар передаёт второму 64% своей кинетической энергии. Опыт повторяют, заменив движущийся шар шаром другой массы, но не изменив его начальной скорости. Оказалось, что в результате второго опыта доля переданной покоящемуся шару кинетической энергии не изменилась. Определите, на какую величину Δm отличались массы движущихся шаров в двух опытах.

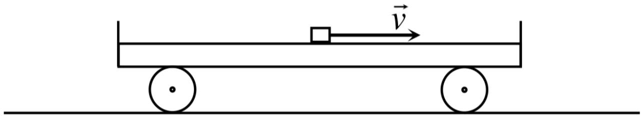
$\boxed{\Delta m = 450\text{ г}}$

Задача 12. (*«Росатом», 2013, 11*) Имеются три шара с массами m, μ и $2m$. Шар массой $2m$ движется, остальные шары покоятся (см. рисунок). Происходят центральные упругие столкновения шаров. При каком значении массы μ шар массой m будет иметь после столкновения с шаром μ максимальную скорость?



$\boxed{\mu = m\sqrt{2}}$

Задача 13. (*«Росатом», 2020, 11*) На горизонтальном столе покоится игрушечная тележка массой M и длиной L с высокими бортиками. В центре тележки находится точечное тело массой m. В некоторый момент времени телу толчком сообщили скорость v в направлении переднего бортика тележки (см. рисунок).



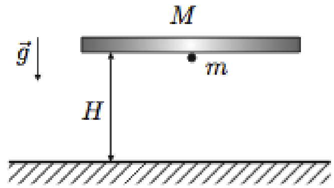
Испытав упругое столкновение с передним бортиком, тело отражается в направлении заднего бортика, стукнувшись о него — в направлении переднего и т. д. Какой путь пройдет тележка к тому моменту, когда тело окажется в центре тележки, испытав 2020 столкновений с ее бортиками?

$\boxed{S_m = \frac{2020ml}{m+M}}$

Задача 14. (*«Курчатов», 2018, 11*) На льду стоит ящик, две противоположные стенки которого скреплены жёстким горизонтальным стержнем. По стержню может скользить, не касаясь дна ящика, муфта, соединённая пружинами с концами стержня. Сначала ящик и муфта неподвижны, пружины не деформированы. Коротким ударом ящику сообщают некоторую скорость в направлении стержня. Найдите отношение x минимальной и максимальной скоростей ящика при движении. Известно отношение α массы ящика к массе муфты: $\alpha = 9$. Считайте, что за время удара пружины не успевают деформироваться. Массами стержня и пружин, а также трением пренебрегите.

$\boxed{x = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} = 0{,}8}$

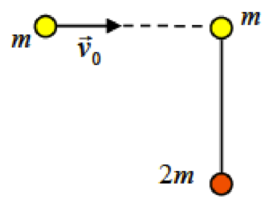
Задача 15. (*Всеросс., 2012, РЭ, 11*) Над поверхностью земли находится пластина массой M. Между ней и землёй движется шарик массой m. В момент любого столкновения пластины с шариком высота пластины над землёй равна H, как будто пластина просто «висит» (см. рисунок). Все удары абсолютно упругие.



Считая, что пластина всегда параллельна поверхности земли и может двигаться только вертикально, найдите кинетическую энергию K шарика у поверхности земли при условии $m \ll M$. (Скорость шарика при всех столкновениях с пластиной одна и та же.)

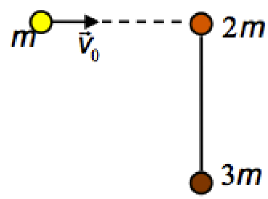
$\boxed{K = \frac{(M+m)^2 gH}{2M+m} \approx \frac{1}{2} MgH}$

Задача 16. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) На гладком горизонтальном столе лежат стальные шарики массами m и $2m$, связанные натянутой невесомой нерастяжимой нитью длины l. Ещё один шарик массы m налетает на систему со скоростью v_0 (перпендикулярно натянутой нити), и происходит абсолютно упругий лобовой удар (см. рисунок). Найти величину силы натяжения нити и ускорение шарика массы $2m$ после удара.



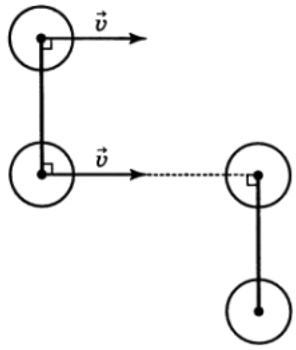
$\boxed{T = \frac{2mv_0^2}{3l};\ a = \frac{v_0^2}{3l}}$

Задача 17. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11*) На гладком горизонтальном столе лежат упругие шайбы с массами $2m$ и $3m$, связанные слегка натянутой невесомой нерастяжимой нитью длины l. Еще одна шайба массы m налетает на систему со скоростью v_0 (перпендикулярно), и происходит абсолютно упругий лобовой удар с одной из шайб (см. рисунок). Найти угловую скорость вращения и величину силы натяжения нити после удара.



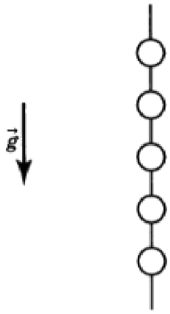
$\boxed{\omega = \frac{2v_0}{3l};\ T = \frac{8mv_0^2}{15l}}$

Задача 18. (*Всеросс., 1996, ОЭ, 11*) На гладкой горизонтальной поверхности стола лежит гантелька, представляющая собой два одинаковых гладких абсолютно упругих диска радиуса R, соединённых жёстким невесомым стержнем так, что расстояние между их центрами $L = 2\sqrt{3}R$. Концы стержня шарнирно закреплены в центрах дисков. На гантельку налетает со скоростью v другая такая же гантелька, движущаяся перед соударением по столу так, как показано на рисунке (вид сверху). Как будут двигаться гантельки после столкновения?



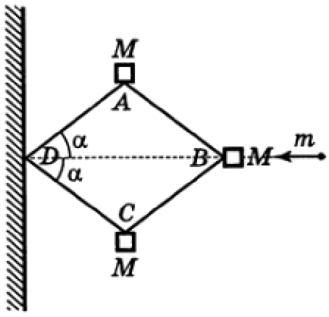
См. конец листка

Задача 19. (*Всеросс., 1995, ОЭ, 10*) Система тел состоит из пяти одинаковых маленьких упругих бусинок, которые могут свободно скользить по бесконечному вертикальному стержню без трения (рис.). Каждой бусинке сообщают начальную скорость. Какое наибольшее число столкновений бусинок друг с другом возможно, если все начальные скорости имеют различное значение и могут быть направлены как в ту, так и в другую сторону?



$\boxed{10}$

Задача 20. (*Всеросс., 1997, ОЭ, 11*) Шарик массой m упруго ударяется о конструкцию $ABCD$ в форме ромба (рис.) и останавливается. Конструкция состоит из лёгких шарнирно соединённых штанг и трёх грузов массы M каждый, закреплённых в точках A, B и C. Шарнир D укреплён в массивной стене. Скорость шарика направлена вдоль BD. Найдите массу M, считая известными массу m и угол α.



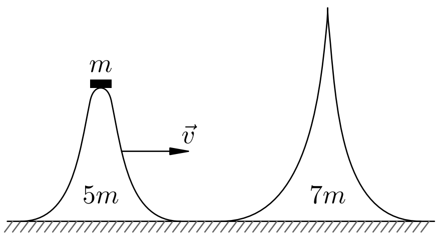
$\boxed{M = m\left(1+\frac{1}{2\sin^2\alpha}\right)^{-1}}$

Горки, трубки, каналы

Задача 21. (*«Физтех», 2008*) Горка массой $5m$ с покоящейся на её вершине шайбой массой m скользит со скоростью v по гладкой горизонтальной поверхности стола в направлении покоящейся незакреплённой горки массой $7m$ (см. рисунок). От незначительного толчка шайба съезжает с горки, горка останавливается, а шайба движется по столу в направлении горки массой $7m$.

1) Найдите высоту горки массой $5m$.

2) На какую максимальную высоту сможет подняться шайба на горке массой $7m$?



Поверхности горок гладкие. Горки имеют плавный переход к поверхности стола. Шайба не отрывается от поверхности горок, а поступательно движущиеся горки — от стола. Направления всех движений находятся в одной вертикальной плоскости.

$\boxed{1)\ h = \frac{15v^2}{g};\ 2)\ x = \frac{63v^2}{4g}}$

Задача 22. (*Всеросс., 2011, финал, 9*) Небольшая шайба, скользящая по гладкой горизонтальной поверхности, наезжает на гладкую горку, покоящуюся на той же поверхности (рис.). После того как шайба соскользнула с горки, оказалось, что шайба и горка движутся по гладкой горизонтальной поверхности с одинаковыми по модулю скоростями.

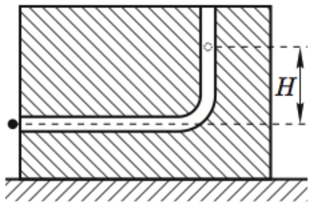
1) Определите, при каком соотношении масс шайбы и горки это возможно.

2) Найдите отношение максимальной потенциальной энергии, которая была у шайбы во время подъёма на горку, к начальной кинетической энергии шайбы.

Примечание. Во время подъёма и спуска шайба не отрывается от горки.

$\boxed{1)\ 1/3;\ 2)\ 3/4}$

Задача 23. (*Всеросс., 2007, ОЭ, 10*) Брусок массой M покоится на гладкой горизонтальной поверхности. В бруске просверлен тонкий канал, состоящий из трёх участков: горизонтального, вертикального и плавно их соединяющего изогнутого участка (рис.). В канал влетает с некоторой горизонтальной скоростью маленький шарик массой m. В процессе движения шарик поднимается до максимальной высоты H в вертикальном канале. Определите скорости v_1 шарика и v_2 бруска сразу после того как шарик выскользнет из канала. Трение не учитывайте.

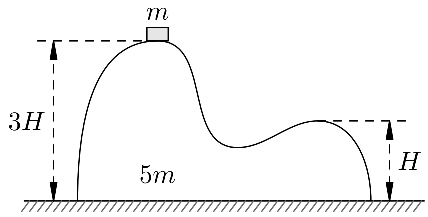


$v_1 = \frac{m-M}{m+M}\sqrt{\frac{2gH(M+m)}{M}}$, $v_2 = \frac{2m}{m+M}\sqrt{\frac{2gH(M+m)}{M}}$

Задача 24. (*МФТИ, 1997*) На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится горка с двумя вершинами, высоты которых H и $3H$. На левой вершине горки находится шайба массой m (см. рисунок). Масса горки $5m$, её поверхность гладкая. От незначительного толчка вправо шайба приходит в движение. Найти скорость шайбы на правой вершине, если:

1) горка закреплена на столе;
2) горка не закреплена.

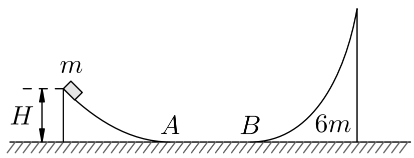
Считать, что при движении шайба не отрывается от поверхности горки, а поступательно движущаяся горка — от стола.



1) $v = 2\sqrt{gH}$; 2) $v = \sqrt{\frac{3}{10}gH}$

Задача 25. (*МФТИ, 1997*) На гладкой горизонтальной поверхности стола покоятся две горки с гладкими поверхностями, плавно переходящими в поверхность стола (см. рисунок). Горка A закреплена на столе, и на ней на высоте H удерживают шайбу массой m. Масса горки B равна $6m$. Шайбу отпускают. Найти максимальную высоту (считая от стола) подъёма шайбы на горке B, если:

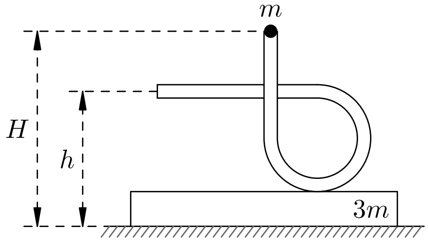
1) горка B закреплена на столе;
2) горка B не закреплена.



1) $h = H$; 2) $h = \frac{6}{7}H$

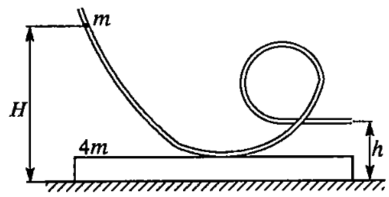
Задача 26. (*МФТИ, 1997*) Трубка в виде петли укреплена на платформе, находящейся на гладкой горизонтальной поверхности стола (см. рисунок). Нижний конец трубки горизонтален и находится на расстоянии h от стола. Шарик массой m, который может скользить по трубке без трения, удерживается на высоте H от стола. Масса платформы с трубкой равна $3m$. Найти скорость вылетевшего из трубки шарика, если:

1) платформа закреплена на столе;
2) платформа не закреплена и после вылета шарика движется поступательно.



1) $v = \sqrt{2g(H-h)}$; 2) $v = \sqrt{\frac{3}{2}g(H-h)}$

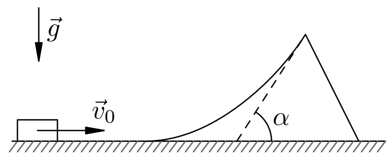
Задача 27. (*МФТИ, 1997*) Трубка в виде петли жёстко укреплена на платформе, находящейся на гладкой горизонтальной поверхности стола. Правый конец трубки горизонтален, его расстояние до стола равно h. В трубке на высоте H удерживается шарик массой m, который может скольдить по трубке без трения (см. рисунок). Масса платформы с трубкой $4m$. Система покоится. Шарик отпускают. Найти скорость вылетевшего из трубки шарика, если:



1) платформа закреплена на столе;
2) платформа не закреплена и после вылета шарика движется поступательно.

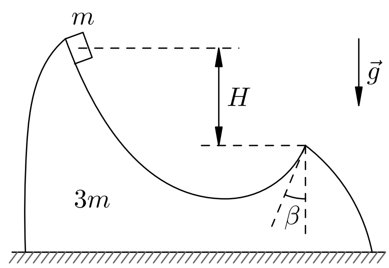
1) $v = \sqrt{2g(H-h)}$; 2) $v = \sqrt{\frac{8}{5}g(H-h)}$

Задача 28. (*МФТИ, 2002*) Шайба массой m скользит со скоростью v_0 по гладкой горизонтальной поверхности стола, попадает на покоящийся клин массой $2m$, скользит по нему без трения и отрыва и покидает клин (см. рисунок). Клин, не отрывавшийся от стола, приобретает скорость $v_0/4$. Найти угол α наклона к горизонту поверхности верхней части клина. Нижняя часть клина имеет плавный переход к поверхности стола. Изменением потенциальной энергии шайбы в поле тяжести при её движении по клину пренебречь. Направления всех движений параллельны плоскости рисунка.



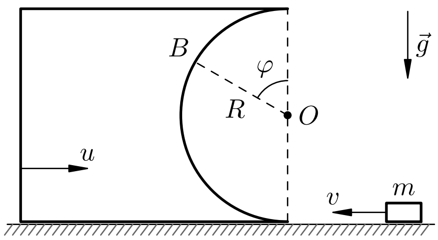
$\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{11}}$

Задача 29. (*МФТИ, 2002*) На вершине покоящейся на гладком горизонтальном столе горки массой $3m$ удерживают шайбу массой m (см. рисунок). Шайбу отпускают, и она скользит по горке без трения и отрыва и покидает горку. Горка, не отрывавшаяся от стола, приобретает скорость u. Найти разность высот H между вершинами горки. Верхняя часть поверхности правой вершины горки наклонена к вертикали под углом $\beta = 30°$. Направления всех движений параллельны плоскости рисунка.



$H = \frac{2u^2}{g}(3 + 4\,\mathrm{ctg}^2\,\beta) = \frac{30u^2}{g}$

Задача 30. (*МФТИ, 2005*) Брусок с выемкой в форме полуцилиндра радиусом R движется со скоростью u по гладкой горизонтальной поверхности стола (см. рисунок). Небольшая по сравнению с размерами бруска монета массой m скользит по столу со скоростью v навстречу бруску, скользит далее по гладкой поверхности выемки, не отрываясь от неё, и оказывается в точке B, продолжая скользить по выемке вверх. Радиус OB составляет угол φ ($\cos\varphi = 2/3$) с вертикалью. Масса бруска намного больше массы монеты.



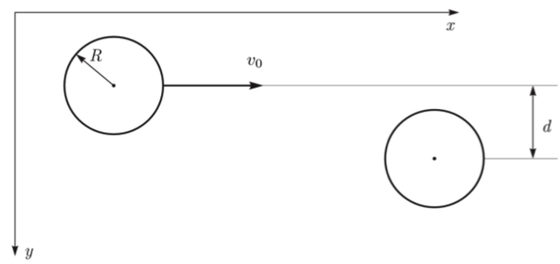
1) Найдите скорость монеты относительно бруска в точке B.
2) Найдите силу давления монеты на брусок в точке B.

$\boxed{1)\ v_B = \sqrt{(v+u)^2 - \frac{10}{3}gR};\ 2)\ N = m\left(\frac{(v+u)^2}{R} - 4g\right)}$

Нецентральный удар

Задача 31. Шар, движущийся поступательно со скоростью v_0 по горизонтальной поверхности, налетает на такой же покоящийся шар. Происходит упругий нецентральный удар. Докажите, что шары разлетятся под прямым углом.

Задача 32. (*Всеросс., 2015, РЭ, 10*) На гладкой горизонтальной поверхности находятся две одинаковые гладкие шайбы радиуса R. Одной из шайб сообщают скорость v_0 вдоль оси x (см. рисунок). При каком значении прицельного параметра d проекция на ось y скорости второй шайбы после абсолютно упругого удара максимальна?



$\boxed{d = R\sqrt{2}}$

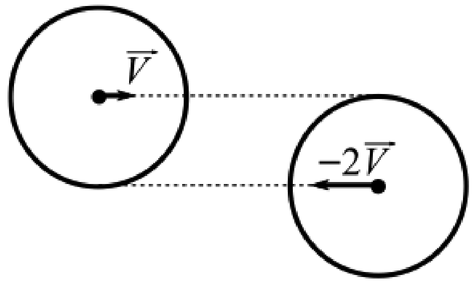
Задача 33. (*«Физтех», 2019, 10*) Гладкая упругая шайба радиуса R, движущаяся со скоростью V_0, упруго сталкивается с такой же шайбой, покоящейся на гладкой горизонтальной поверхности. В результате столкновения скорость налетающей шайбы уменьшается вдвое.

1. Найдите расстояние d от центра покоившейся шайбы до прямой, по которой двигался центр налетающей шайбы.

2. Через какое время T после соударения расстояние между центрами шайб будет равно S?

$\boxed{1)\ d = R;\ 2)\ T = \frac{\sqrt{S^2 - R^2} - R\sqrt{3}}{V_0}}$

Задача 34. (*«Физтех», 2019, 10*) Две одинаковые гладкие упругие шайбы движутся по гладкой горизонтальной поверхности. Скорость первой шайбы $\vec{V}$, скорость второй $\left(-2\vec{V}\right)$. Для каждой шайбы прямая, сонаправленная с вектором скорости и проходящая через центр шайбы, касается другой шайбы. Происходит абсолютно упругое соударение.



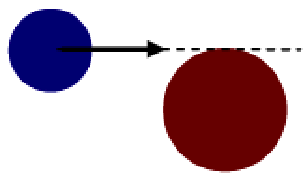
1. Найдите скорость V_1 (по модулю) первой шайбы после соударения.

2. На какой угол α повернется вектор скорости первой шайбы в результате соударения?

1) $V_1 = \frac{\sqrt{13}}{2}v$; 2) $\alpha \approx 2{,}33$ рад $\approx 133°$

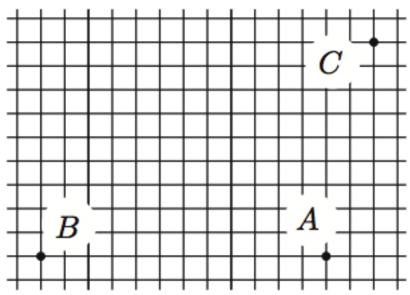
[Овчинкин] → 4.81.

Задача 35. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11*) Гладкая цилиндрическая шайба покоится на гладкой горизонтальной поверхности. В неё врезается шайба, изготовленная из того же материала, той же высоты, радиус которой в $n = 1{,}5$ раза меньше, чем у покоящейся. Линия движения центра налетающей шайбы касается боковой поверхности покоящейся. Под какими углами к направлению движения налетающей шайбы будут двигаться шайбы после упругого удара?



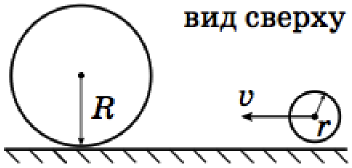
Первая: $\alpha = \arcsin\frac{3}{5} \approx 37°$; вторая: $\beta = \operatorname{arctg}\frac{20}{39} + \arccos\frac{3}{5} \approx 80°$

Задача 36. (*Всеросс., 2007, финал, 10*) На горизонтальной плоскости находятся два одинаковых диска с гладкой боковой поверхностью. Первый покоился, а второму сообщили скорость v. Найдите скорости дисков после их упругого соударения, используя рисунок, где отмечены положение центра первого диска до столкновения (A) и положения центров первого и второго дисков в один и тот же момент времени после столкновения (точки B и C соответственно). Трением пренебречь.



$v_1 = \frac{4}{5}v$, $v_2 = \frac{3}{5}v$

Задача 37. (*Всеросс., 2018, финал, 10*) Две шайбы находятся на гладкой горизонтальной поверхности. Малая шайба радиуса r движется со скоростью v вдоль вертикальной стенки при малом зазоре с ней. Большая шайба радиуса $R = 7r$ касается стенки. Какую скорость u приобретёт большая шайба после всех столкновений, если массы шайб одинаковы? Трения в системе нет, столкновения шайб друг с другом и со стенкой абсолютно упругие.



$$\boxed{u = \frac{9\sqrt{7}}{32} v}$$

Ответ к задаче 18

$v_1 = \frac{v\sqrt{3}}{2}$, $v_2 = \frac{v}{2}$.