Ударные силы

Начнём с простого примера: пластилиновый шарик летит вертикально вниз, падает на горизонтальную плиту и моментально останавливается (прилипая к ней). Как будет выглядеть второй закон Ньютона для процесса соударения? Ускорение шарика при торможении направлено вверх, поэтому

$$ma = N - mg. \tag{1}$$

Пусть τ — время торможения шарика. Оно очень мало. Понятно, что сила N как-то меняется в течение времени τ, однако не будет большой ошибкой считать, что N — это *средняя* сила реакции опоры за время удара. Тогда и ускорение a — это среднее ускорение $a = v_0/\tau$, где v_0 — скорость шарика непосредственно перед ударом. Второй закон Ньютона (1) примет вид:

$$m\frac{v_0}{\tau} = N - mg. \tag{2}$$

Запишем это так:

$$mv_0 = N\tau - mg\tau.$$

Левая часть mv_0 есть конечная величина — это импульс шарика перед ударом. Величина $mg\tau$ очень мала, поскольку является произведением конечной силы mg на очень малое время τ. Тогда получается, что величина $N\tau$ конечна. Но поскольку τ очень мало, *сила N очень велика.* Оно и понятно уже из (2): скорость шарика меняется от v_0 до нуля почти мгновенно, ускорение шарика v_0/τ огромно, поэтому огромна и сила N, обеспечивающая это ускорение. Таким образом, $N \gg mg$, так что силой тяжести в (2) пренебрегаем:

$$m\frac{v_0}{\tau} = N$$

или

$$mv_0 = N\tau.$$

Последнее равенство есть второй закон Ньютона в импульсной форме: изменение импульса шарика mv_0 равно импульсу силы $N\tau$.

Задача 1. (*МФТИ, 1974*) Мешок с мукой сползает без начальной скорости с высоты H по гладкой доске, наклонённой под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. После спуска мешок попадает на горизонтальный пол. Коэффициент трения мешка о пол $k = 0{,}7$. Где остановится мешок?

Задача 2. (*МФТИ, 1974*) Мешок с мукой сползает без начальной скорости с высоты $H = 2$ м по доске, наклонённой под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. После спуска мешок попадает на горизонтальную поверхность. Коэффициент трения мешка о доску и поверхность равен $k = 0{,}5$. На каком расстоянии от конца доски остановится мешок?

0,25 м

Задача 3. (*«Физтех», 2020, 9*) Вниз по шероховатой наклонной плоскости равнозамедленно движется брусок. В тот момент, когда скорость бруска равна $V_1 = 1$ м/с, на брусок падает пластилиновый шарик и прилипает к нему, а брусок останавливается. Движение шарика до соударения — свободное падение с высоты $h = 0{,}8$ м с нулевой начальной скоростью.

1. Найдите скорость V_2 шарика перед соударением.
2. Найдите величину a ускорения бруска перед соударением.

Массы бруска и шарика одинаковы. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Быстрые процессы торможения бруска и деформации пластилина заканчиваются одновременно. В этих процессах действие сил тяжести считайте пренебрежимо малым.

1) $V_2 = \sqrt{2gh} = 4$ м/с; 2) $a = g\frac{V_1}{V_2} = 2{,}5$ м/с^2

Задача 4. (*«Физтех», 2021, 9*) С гладкой наклонной плоскости бросают тряпичный мешочек, наполненный песком. Вектор начальной скорости $V_0 = 12$ м/с образует с горизонтальной плоскостью угол α, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{3}$. Мешочек перед столкновением с плоскостью движется горизонтально, после столкновения безотрывно скользит по плоскости. Движение мешочка по плоскости прямолинейное.

1. На какой высоте H, отсчитанной от точки старта, мешочек сталкивается с плоскостью?
2. Найдите $\operatorname{tg}\beta$, здесь β — угол, который наклонная плоскость образует с горизонтом.
3. Через какое время T после падения на плоскость мешочек остановится?
4. Если наклонная плоскость шероховатая, то при каких значениях коэффициента трения скольжения мешочек не будет перемещаться по плоскости?

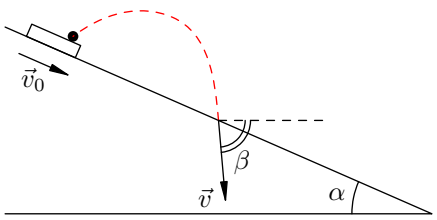
Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой. Действием силы тяжести в процессе столкновения пренебрегите.

1) $H = \frac{32V_0^2}{73g} \approx 6{,}3$ м; 2) $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$; 3) $T = \frac{9}{4\sqrt{73}}\frac{V_0}{g} \approx 0{,}3$ с; 4) остановка при $\mu \geqslant \frac{3}{4}$ и длительный покой при $\mu \geqslant \frac{4}{3}$

Задача 5. (*Всеросс., 1994, ОЭ, 10*) Упругая шайба падает плашмя на горизонтальную абсолютно твёрдую поверхность таким образом, что в момент падения её скорость равна $v_0 = 4{,}5$ м/с и направлена под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Коэффициент трения скольжения между шайбой и поверхностью $k = 0{,}5$. На каком расстоянии от места падения шайба ударится о поверхность в пятый раз? Влиянием силы тяжести за время удара можно пренебречь.

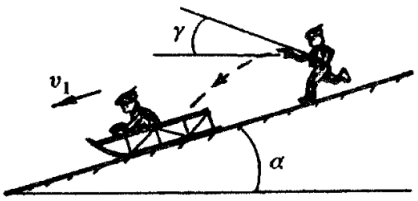
0,75 м

Задача 6. (*МФТИ, 1991*) Сани с седоком и собакой общей массой M съезжают с постоянной скоростью v_0 с горы, имеющей уклон α ($\cos\alpha = 6/7$). Собака массой m спрыгивает с саней вперёд по ходу их движения и приземляется на склон, имея скорость v, направленную под углом β к горизонту ($\cos\beta = 3/7$). Сани после этого продолжают двигаться по горе вниз. Найти скорость саней с седоком после прыжка собаки.



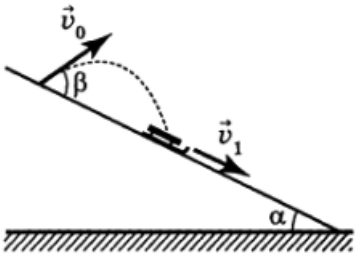
$$u = \frac{Mv_0\cos\alpha - mv\cos\beta}{(M-m)\cos\alpha} = \frac{2Mv_0 - mv}{2(M-m)}$$

Задача 7. (*МФТИ, 1991*) Мальчик массой m съезжает на санках массой M с постоянной скоростью v_1 (см. рисунок) с горы, имеющей уклон α ($\cos\alpha = 8/9$). Другой мальчик такой же массы m бежит за санками и запрыгивает в них, имея в начале прыжка скорость, направленную под углом γ ($\cos\gamma = 7/9$) к горизонту. В результате этого санки с мальчиками движутся по горе со скоростью v_2. Найти скорость прыгнувшего мальчика в начале прыжка.



$$u = \frac{(M+2m)v_2 - (M+m)v_1}{m}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$$

Задача 8. (*Всеросс., 2000, ОЭ, 11*) С горки с углом наклона к горизонту α съезжают по кратчайшему пути с постоянной скоростью v_1 санки массой M (рис.). За санками бежит собака массой m и запрыгивает на них. В начале прыжка её скорость v_0 и направлена под углом β к поверхности горки. Найдите скорость санок с собакой, если известно, что санки после соприкосновения с собакой не останавливались.



$$v = \frac{Mv_1\cos\alpha + mv_0\cos(\beta-\alpha)}{(M+m)\cos\alpha}$$

Задача 9. (*Всеросс., 2018, финал, 9*) Кусок пластилина массой m, упав без начальной скорости с некоторой высоты, прилип к бруску такой же массы, движущемуся по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью $v_0 = 4$ м/с под действием постоянной горизонтальной силы. Коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 0{,}2$. Определите скорость v_1 бруска через время $t_1 = 1$ с после начала падения пластилина. Постройте график зависимости скорости бруска v от времени t после начала падения пластилина для двух случаев: а) с высоты $h_a = 10$ м; б) с высоты $h_b = 25$ м, указав на нём координаты характерных точек.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

$$v_1 = \begin{cases} v_0 = 4 \text{ м/с}, & \text{если } h > 5 \text{ м}; \\ \frac{1}{2}(v_0 - \mu g t_1) = 1 \text{ м/с}, & \text{если } h < 5 \text{ м} \end{cases}; \text{ график}$$

Задача 10. (*МОШ, 2017, 10*) По закреплённой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, скользил брусок массой $2m$, двигаясь с постоянной скоростью V. Сверху без начальной скорости отпустили кусок пластилина массой m. Пролетев расстояние H, пластилин упал на брусок и прилип к нему. Какое количество теплоты выделилось за время соударения? Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

$\boxed{Q = m\left(\frac{V^2}{3} + gH\right)}$

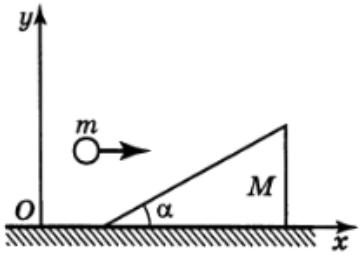
Задача 11. (*МОШ, 2011, 10*) На гладкой горизонтальной поверхности находится жёсткий клин массой M, причём его гладкая наклонная поверхность составляет угол α с горизонтом. На этот клин налетает жёсткий шарик массой m, у которого за мгновение до столкновения с наклонной поверхностью клина скорость была горизонтальной. Происходит абсолютно упругий удар. При каком отношении m/M шарик после удара будет двигаться в вертикальном направлении?

$\boxed{m/M = 1 - \operatorname{ctg}^2\alpha}$

Задача 12. (*МОШ, 2011, 11*) На гладкой горизонтальной поверхности находится жёсткий клин массой M, причём его гладкая наклонная поверхность составляет угол α с горизонтом. На этот клин налетает жёсткий шарик той же массы M, у которого за мгновение до столкновения с наклонной поверхностью клина скорость была горизонтальной. Происходит абсолютно упругий удар. Какой угол β с горизонтом составит скорость шарика сразу после удара?

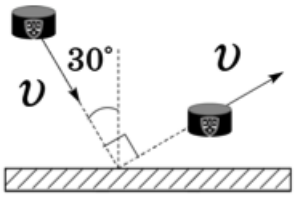
$\boxed{\beta = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\alpha)}$

Задача 13. (*Всеросс., 1997, ОЭ, 10*) На гладкой горизонтальной поверхности массивной плиты покоится клин массой M и углом наклона $\alpha = 30°$ (рис.). Клин плотно прилегает к поверхности плиты. Шар массой m летит горизонтально и ударяется о гладкую наклонную поверхность клина (удар упругий). В результате клин начинает двигаться по плите. Найдите отношение m/M, если через некоторое время шар попадает в ту же точку на клине, от которой он отскочил.



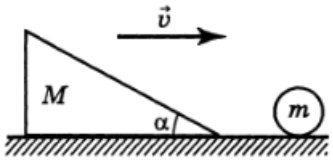
$\boxed{\frac{m}{M} = \operatorname{ctg}^2\alpha - 1 = 2}$

Задача 14. (*Всеросс., 2019, РЭ, 10*) Шайба летит в сторону движущейся поступательно тяжёлой плиты так, что их плоскости параллельны. Вектор скорости шайбы составляет угол $\varphi = 30°$ с нормалью к поверхности плиты. Происходит столкновение. Векторы скорости шайбы до и после столкновения одинаковы по модулю и перпендикулярны друг другу (см. рисунок). Кроме того, они лежат в одной плоскости с вектором скорости плиты. Определите минимальное и максимальное значения коэффициента трения μ, при которых возможно такое столкновение.



$\boxed{\mu \geqslant 2 - \sqrt{3}}$

Задача 15. (*Всеросс., 1994, финал, 10*) На гладком горизонтальном столе лежит шар массы m. С шаром упруго сталкивается клин массы $M = m/2$, движущийся углом вперёд со скоростью $v = 5$ м/с (рис.). Определите время, через которое шар опять столкнётся с клином. Угол клина $\alpha = 30°$.

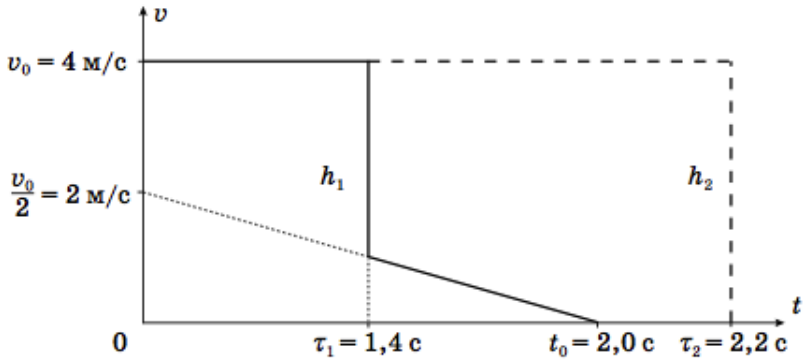


Указание. Задачу решать в предположении, что импульс передаётся клину только в горизонтальном направлении.

$$\boxed{\tau = \frac{2v}{g\sqrt{3}} \approx 0{,}6 \text{ с}}$$

Задача 16. (*Всеросс., 2013, финал, 10*) Мешочек с песком бросают с горизонтальной поверхности земли под некоторым углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. После приземления он теряет вертикальную составляющую скорости. Найдите максимальное горизонтальное перемещение мешочка относительно точки бросания и угол α, при котором оно достигается. Коэффициент трения между мешком и плоскостью равен μ. Ускорение свободного падения g. Время удара считайте малым.

$$\boxed{L_{\max} = \begin{cases} \dfrac{v_0^2}{g}\dfrac{1+\mu^2}{2\mu}, & \text{если } \mu \leqslant 1 \ (\text{при } \operatorname{tg}\alpha = \mu); \\ \dfrac{v_0^2}{g}, & \text{если } \mu > 1 \ (\text{при } \alpha = 45°) \end{cases}}$$

[Овчинкин] → 2.24, 2.66, 4.10, 4.53, 4.58, 4.59.

Ответ к задаче 9