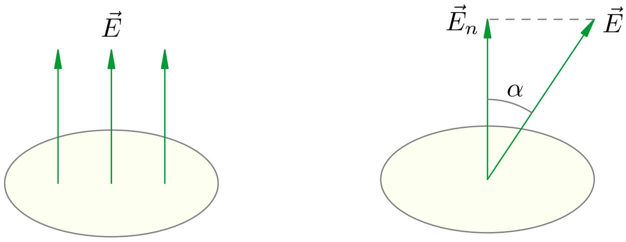
Теорема Гаусса

Для графического изображения электрического поля используются линии поля. Чем гуще идут линии поля, тем больше напряжённость поля в данной области пространства. Для формализации интуитивно ясного «количества линий поля», пронизывающих данную поверхность, служит понятие *потока* вектора напряжённости поля через эту поверхность.

Поток вектора напряжённости

Пусть для начала поле $\vec{E}$ однородно и пронизывает контур площади S. Если поле перпендикулярно плоскости контура, то поток Φ определяется как произведение напряжённости поля на площадь контура: $\Phi = ES$ (рисунок слева).



$\Phi = ES$ $\quad$ $\Phi = E_nS = ES\cos\alpha$

Если же вектор $\vec{E}$ образует угол α с нормалью к плоскости контура (рисунок справа), то сквозь контур «протекает» лишь перпендикулярная составляющая $\vec{E}_n$ вектора $\vec{E}$ (а та составляющая, которая параллельна контуру, не «течёт» сквозь него). Поэтому имеем:

$$\Phi = E_nS = ES\cos\alpha. \tag{1}$$

Это и есть определение потока вектора напряжённости в частном случае однородного электрического поля. Обратите внимание, что если вектор $\vec{E}$ параллелен плоскости контура (то есть $\alpha = 90^\circ$), то поток становится равным нулю.

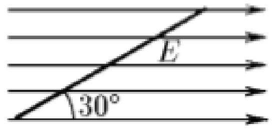
В общем случае, когда поле не является однородным, поверхность контура разбивается на очень большое число очень маленьких площадок ΔS_i, в пределах которых поле $\vec{E}_i$ можно считать однородным. Для каждой такой площадки вычисляем свой маленький поток $\Delta\Phi_i$ по формуле (1), а затем все эти потоки суммируем:

$$\Phi = \sum_i \Delta\Phi_i = \sum_i E_{ni}\Delta S_i.$$

Полученная сумма есть на самом деле интеграл по поверхности контура:

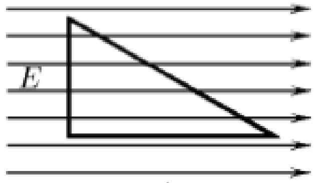
$$\Phi = \int\limits_S E_n dS.$$

Задача 1. (*Савченко, 6.2.1*) а) Напряжённость однородного электрического поля равна E. Чему равен поток напряжённости электрического поля через квадрат со стороной a, плоскость которого расположена под углом 30° к направлению электрического поля?



а

б) При расчёте потока напряжённости электрического поля через замкнутую поверхность потоки, входящие вовнутрь, берутся со знаком минус, выходящие вовне потоки берутся со знаком плюс. Используя это правило, найдите отрицательные и положительные потоки однородного электрического поля напряжённости E через замкнутую поверхность прямой трехгранной призмы, высота которой h. Передняя грань призмы, ширина которой равна h, перпендикулярна E, нижняя грань параллельна E.

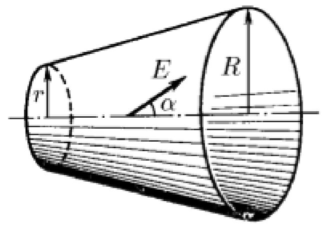


б

в) Докажите, что поток напряжённости однородного электрического поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

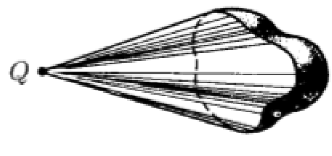
а) $\Phi = Ea^2/2$; б) $\Phi_- = -Eh^2$, $\Phi_+ = Eh^2$

Задача 2. (*Савченко, 6.2.2*) Чему равен поток напряжённости однородного электрического поля через боковую поверхность усечённого конуса, радиусы сечения которого равны R и r? Напряжённость электрического поля E составляет угол α с осью конуса.



$\Phi = E\cos\alpha \cdot \pi\left(r^2 - R^2\right)$

Задача 3. (*Савченко, 6.2.3*) Докажите, что поток напряжённости электрического поля точечного заряда Q через любую поверхность равен телесному углу, под которым видна эта поверхность, умноженному на $Q/(4\pi\varepsilon_0)$.



Задача 4. (*Савченко, 6.2.4*) Поток напряжённости электрического поля через плоскую поверхность, равномерно заряженную с поверхностной плотностью заряда σ, равен Φ. Чему равна электрическая сила, действующая на пластину в направлении, перпендикулярном её плоскости?

$F = \sigma\Phi$

Задача 5. (*Савченко, 6.2.5*) а) С какой силой действует электрический заряд q на равномерно заряженную бесконечную плоскость? С какой силой действует эта плоскость на заряд? Чему равна напряжённость электрического поля плоскости? Поверхностная плотность заряда σ.

б) С какой силой действует на каждую грань тетраэдра заряд q, помещённый в его центре? Поверхностная плотность заряда граней σ.

а) $F = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}$, $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$; б) $F = \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}$

Теорема Гаусса

В задаче 1 вы доказали, что поток однородного электрического поля через замкнутую поверхность равен нулю. На самом деле этот факт верен для любого электрического поля, если равен нулю суммарный заряд внутри данной поверхности. А в самом общем случае поток выражается через полный заряд, расположенный внутри поверхности, по очень простой формуле.

Теорема Гаусса. Поток напряжённости электрического поля через замкнутую поверхность S даётся формулой

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}\,,$$

где q — полный заряд, находящийся в объёме, ограниченном поверхностью S.

Задача 6. (*Савченко, 6.2.6*) Используя теорему Гаусса, определите напряжённость электрического поля:

а) внутри и вне равномерно заряженной сферы, если полный заряд сферы Q;

б) равномерно заряженной бесконечной нити, если заряд единицы длины нити ρ;

в) равномерно заряженной бесконечной плоскости, если поверхностная плотность заряда плоскости σ;

г) внутри и вне равномерно заряженного шара радиуса R, если объёмная плотность заряда ρ; нарисуйте график зависимости напряжённости электрического поля от расстояния до центра шара;

д) внутри и вне равномерно заряженного бесконечного цилиндра радиуса R, если объёмная плотность заряда внутри цилиндра равна ρ; нарисуйте график зависимости напряжённости электрического поля от расстояния до оси цилиндра;

е) вне и внутри равномерно заряженной бесконечной пластины толщины h, если объёмная плотность заряда в пластине равна ρ; нарисуйте график зависимости напряжённости электрического поля от расстояния до центральной плоскости пластины.

См. конец листка

Задача 7. (*МОШ, 2018, 11*) Равномерно заряженный по объёму шарик радиусом R внесли в однородное электрическое поле напряжённостью E_0. Максимальный угол между векторами напряжённости результирующего поля и поля E_0 оказался равным 60°. Найдите заряд шарика, если после его внесения во внешнее поле распределение заряда не изменилось.

$q = \frac{E_0R^2\sqrt{3}}{2k}$

Задача 8. (*Савченко, 6.2.8*) С какой силой расталкиваются равномерно заряженные грани: а) куба; б) тетраэдра? Поверхностная плотность заряда граней σ, длина ребра a.

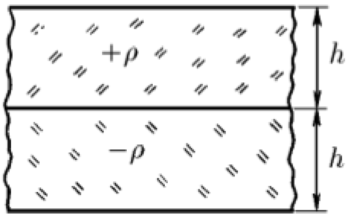
Указание. Окружите данную фигуру подобной фигурой немного большего размера и используйте последнюю в качестве замкнутой поверхности для теоремы Гаусса.

а) $F = \frac{\sigma^2a^2}{2\varepsilon_0}$; б) $F = \frac{\sqrt{3}\sigma^2a^2}{8\varepsilon_0}$

Задача 9. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11*) Как-то профессор Вагнер решил собрать оригинальную электростатическую шкатулку. Из гладких непроводящих «уголков» он изготовил каркас в форме правильного тетраэдра с длиной ребра a. «Уголки» не позволяли пластинам в форме правильных треугольников, вставленных на место граней тетраэдра, смещаться вдоль плоскости грани или внутрь тетраэдра, но совершенно не мешали им выскальзывать наружу. На каждую из четырех пластин был равномерно нанесен заряд $q < 0$, в центре тетраэдра профессор закрепил маленький непроводящий шарик с зарядом $Q > 2|q|$. Вагнер вложил пластины в грани каркаса. Затем он начал медленно закачивать внутрь тетраэдра воздух, повышая его давление. При какой разности давлений внутри и снаружи «шкатулка» рассыпалась? Электрическая постоянная ε_0.

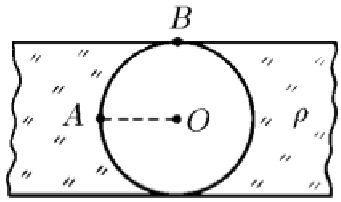
$\Delta p \geqslant \frac{4|q|(Q-2|q|)}{3\varepsilon_0 a^4}$

Задача 10. (*Савченко, 6.2.11*) Две бесконечные пластины толщины h заряжены равномерно по объёму и сложены вместе. Объёмная плотность заряда первой пластины ρ, а второй $-\rho$. Найдите максимальную напряжённость электрического поля.



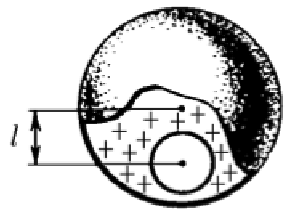
$E_{\max} = \frac{\rho h}{\varepsilon_0}$

Задача 11. (*Савченко, 6.2.12*) В равномерно заряженной бесконечной пластине вырезали сферическую полость так, как показано на рисунке. Толщина пластины h, объёмная плотность заряда ρ. Чему равна напряжённость электрического поля в точке A? в точке B? Найдите зависимость напряжённости электрического поля вдоль прямой OA от расстояния до точки O.



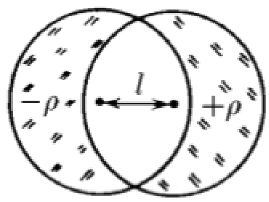
$E_A = \frac{\rho h}{6\varepsilon_0}$, $E_B = \frac{\rho h}{3\varepsilon_0}$; $E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}, & \text{если } r < \frac{h}{2}; \\ \frac{\rho h^3}{24\varepsilon_0 r^2}, & \text{если } r > \frac{h}{2} \end{cases}$

Задача 12. (*Савченко, 6.2.13*) В равномерно заряженном шаре радиуса R вырезали сферическую полость радиуса r, центр которой находится на расстоянии l от центра шара. Объёмная плотность заряда ρ. Найдите напряжённость электрического поля вдоль прямой, проходящей через центр полости и центр шара. Докажите, что электрическое поле в полости однородно.



См. конец листка

Задача 13. (*Савченко, 6.2.14*) а) При пересечении двух шаров радиуса R, центры которых находятся на расстоянии l друг от друга, образуются два «полумесяца», равномерно заряженные разноименными электрическими зарядами. Объёмная плотность электрического заряда слева $-\rho$, справа ρ. Докажите, что электрическое поле в области пересечения шаров однородно. Найдите напряжённость этого поля.



б) Используя результаты пункта *а* и применяя метод предельного перехода: $l \to 0$, $\rho \to \infty$, $\rho l = \mathrm{const}$, найдите распределение заряда на сфере радиуса R, которое даст внутри сферы однородное электрическое поле напряжённости E. Как связана с напряжённостью поля максимальная поверхностная плотность заряда?

а) $E = \frac{\rho l}{3\varepsilon_0}$; б) $\sigma = 3\varepsilon_0 E \cos\alpha$, где α — угол между $\vec{E}$ и радиус-вектором точки на сфере

Ответ к задаче 6

а) $E = \begin{cases} 0, & \text{если } r < R, \\ \frac{kQ}{r^2}, & \text{если } r > R; \end{cases}$

б) $E = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r}$;

в) $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$;

г) $E = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}, & \text{если } r \leqslant R, \\ \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}, & \text{если } r \geqslant R; \end{cases}$

д) $E = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}, & \text{если } r \leqslant R, \\ \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}, & \text{если } r \geqslant R; \end{cases}$

е) $E = \begin{cases} \frac{\rho x}{\varepsilon_0}, & \text{если } x \leqslant \frac{h}{2}, \\ \frac{\rho h}{2\varepsilon_0}, & \text{если } x \geqslant \frac{h}{2}. \end{cases}$

Ответ к задаче 12

Внутри полости $\vec{E} = \frac{\rho\vec{l}}{3\varepsilon_0}$ (вектор $\vec{l}$ проведён от центра шара к центру полости).
Вне полости:

$$E = \begin{cases} \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(x + \frac{r^3}{(l-x)^2}\right), & \text{если } x < l - r, \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(x - \frac{r^3}{(x-l)^2}\right), & \text{если } l + r < x < R, \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R^3}{x^2} - \frac{r^3}{(x-l)^2}\right), & \text{если } x > R. \end{cases}$$