

Теорема единственности

Мы хорошо знаем, что если на уединённую проводящую сферу поместить электрический заряд, то он распределится по сфере *равномерно*. А почему, собственно, равномерно?

Прежде всего, напряжённость поля внутри проводника — и, в частности, внутри металлической сферы — должна равняться нулю. Можно строго доказать (попробуйте это сделать!), что при равномерном распределении заряда по поверхности сферы поле в любой точке внутри неё действительно обращается в нуль.

Однако возникает другой вопрос: а вдруг имеется какое-то другое распределение заряда, отличное от равномерного, при котором поле внутри уединённой сферы также равно нулю во всех точках? Это было бы не слишком приятно — тогда пришлось бы дополнительно разбираться, какое именно из подходящих распределений заряда реализуется в каждой конкретной ситуации. Но, к счастью, ответ на поставленный вопрос является отрицательным.

Теорема единственности. Электрический заряд распределяется по поверхности проводника единственным образом. Иначе говоря, для любой поверхности S , ограничивающей пространственную область V , существует единственная функция $\sigma(X)$, выражающая зависимость поверхностной плотности заряда σ от точки $X \in S$, при которой напряжённость поля в любой точке области V обращается в нуль.

Доказательство. Предположим, что заряд q может распределиться по поверхности проводника двумя способами: $\sigma(X)$ и $\sigma'(X)$. Тогда для заряда $-q$ также имеются два возможных распределения: $-\sigma(X)$ и $-\sigma'(X)$.

Рассмотрим функцию $\sigma''(X) = \sigma(X) - \sigma'(X)$. Она отвечает распределению по поверхности проводника нулевого заряда ($0 = q + (-q)$). Если $\sigma(X) \neq \sigma'(X)$, то поверхностная плотность $\sigma''(X)$ не во всех точках обращается в нуль; стало быть, на поверхности проводника возникают заряды: в одних местах — положительные, в других — отрицательные (ведь суммарный заряд проводника равен нулю). Внутри проводника поля нет, а снаружи оно появляется, и линии электрического поля, начинающиеся на положительных зарядах поверхности проводника, вынуждены заканчиваться на отрицательных зарядах этой же поверхности (а куда им деваться — ведь проводник уединённый, и никаких других зарядов вне проводника у нас нет).

И тут мы приходим к противоречию. С одной стороны, как нам хорошо известно, поверхность проводника является эквипотенциальной. Но с другой стороны, если перемещать пробный заряд вдоль линии поля, начинающейся на положительном заряде в точке A поверхности проводника и заканчивающейся на отрицательном заряде в точке B той же поверхности, то поле совершит ненулевую работу, и тогда потенциал в точке B будет отличаться от потенциала в точке A . Полученное противоречие показывает, что на самом деле $\sigma(X) = \sigma'(X)$, то есть распределение заряда по поверхности проводника единственно. Теорема доказана.

Значение теоремы единственности состоит, в частности, вот в чём: если мы *угадали* распределение заряда по поверхности проводника, то именно это распределение в действительности и реализуется.

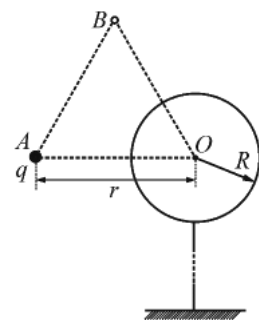
ЗАДАЧА 1. («Росатом», 2014, 11) Два металлических одинаковых полушара радиуса R расположены так, что между ними имеется очень небольшой зазор. Полушары заряжают зарядами $-Q$ и $3Q$ ($Q > 0$). Найти напряжённость электрического поля в зазоре между полушарами.



$$\frac{\partial U^{ш.0э}}{\partial z} = \mathcal{E}$$

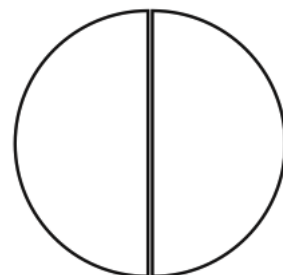
ЗАДАЧА 2. Вне проводника расположен заряд Q . Проводнику сообщают заряд q . Докажите, что заряд q может распределиться по поверхности проводника единственным способом.

ЗАДАЧА 3. (МОШ, 2016, 11) В точке A , расположенной на расстоянии r от центра O незаряженной проводящей сферы радиусом R , находится точечный заряд q . Сферу заземляют длинным тонким проводником. На сколько изменится (после заземления) потенциал φ_B точки B , являющейся вершиной равностороннего треугольника ABO ?



$$\frac{\varphi_B}{\varphi_{Bq}} = \varphi \phi \nabla$$

ЗАДАЧА 4. (Всеросс., 2006, финал, 10) Распространено мнение, что тела с одноимёнными зарядами всегда отталкиваются друг от друга. Вовсе нет! Такой эффект наблюдается далеко не всегда. Представьте себе, что сплошной металлический шар радиуса R распилили пополам, а получившиеся половины сблизили плоскими сторонами так, что зазор d между ними оказался предельно мал ($d \ll R$). Найдите силу электростатического взаимодействия полушарий с одноимёнными зарядами q_1 и q_2 (рис.). При каком отношении зарядов они будут притягиваться?



Примечание. Сила, действующая на единицу поверхности заряженного проводника произвольной формы, связана с напряжённостью электрического поля вблизи поверхности тем же соотношением, что и в плоском конденсаторе.

$$\frac{\epsilon \mu^0 \epsilon_0 \epsilon \epsilon_0}{(\epsilon b \epsilon - \epsilon b)(\epsilon b - \epsilon b \epsilon)} = \mathcal{A}$$