Среднее значение функции

Среднее значение функции $f(t)$ на отрезке $[0;T]$ даётся формулой

$$\overline{f} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\,dt. \qquad (1)$$

Откуда взялась такая формула? Давайте поймём это на физическом уровне строгости. Разобьём отрезок $[0;T]$ на большое количество $N \gg 1$ одинаковых малых отрезков длины $dt = T/N$, концами которых служат точки

$$t_0 = 0, \quad t_1 = dt, \quad t_2 = 2dt, \quad \ldots, \quad t_i = idt, \quad \ldots, \quad t_N = Ndt = T.$$

Тогда наша функция $f(t)$ будет представлена «массивом» $f(t_0)$, $f(t_1)$, $f(t_2)$, …, $f(t_N)$, среднее значение которого равно

$$\frac{f(t_0)+f(t_1)+f(t_2)+\ldots+f(t_N)}{N+1} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} f(t_i) = \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{N} f(t_i)dt.$$

При $N \to \infty$ интегральная сумма $\sum\limits_{i=0}^{N} f(t_i)dt$ переходит в интеграл $\int\limits_0^T f(t)\,dt$, и мы получаем формулу (1).

Более общим образом, среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ находится по формуле

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Понимая интеграл как площадь под графиком, нетрудно дать геометрическую интерпретацию: *среднее значение функции на отрезке есть площадь под графиком функции, делённая на длину отрезка.*

Задача 1. Продолжите фразу: среднее значение функции есть высота прямоугольника…

Задача 2. Взяв в качестве функции f зависимость $v(t)$ скорости от времени, убедитесь, что формула (1) есть хорошо известное вам определение средней скорости.

Задача 3. Покажите, что среднее значение *линейной* функции на отрезке равно значению функции в середине отрезка (или, что то же самое, полусумме значений функции на концах отрезка).

Задача 4. В общем случае среднее значение функции на отрезке не совпадает ни со значением в середине отрезка, ни с полусуммой значений на концах. Убедитесь в этом на примере функции $f(x) = x^2$ и отрезка $[0;1]$.

Задача 5. Найдите среднее значение функции $y = \sqrt{2x - x^2}$ на отрезке $[0;1]$.

Задача 6. Найдите средние значения функций $\sin\omega t$, $\cos\omega t$, $\sin^2\omega t$, $\cos^2\omega t$, вычисленные за период.

Задача 7. Как вы думаете, чему равно среднее значение функции $y = 1/x^2$ на луче $[1; \infty)$?

Средним значением функции $f(t)$ на луче $[0; \infty)$ естественно считать предел

$$\overline{f} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t)\, dt. \tag{2}$$

Задача 8. Найдите средние значения функций $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $\sin^2 \omega t$, $\cos^2 \omega t$ на луче $[0; \infty)$.

Задача 9. Покажите, что среднее значение периодической функции, вычисленное за период, совпадает со средним значением, вычисленным по формуле (2).

Задача 10. (*Эффективное значение переменного тока*) Нас интересует измерение переменного тока $I = I_0 \sin \omega t$. Рассмотрим два амперметра, принципиально различающихся по устройству.

1. Магнитоэлектрический амперметр. Измеряемый ток пропускается в нём через рамку, расположенную между полюсами постоянного магнита. Магнитное поле поворачивает рамку, и в результате стрелка прибора отклоняется.

   Объясните, почему такой амперметр не пригоден для измерения переменного тока.

2. Тепловой амперметр. Измеряемый ток пропускается через проводник R, который нагревается, расширяется и тем самым двигает стрелку прибора.

   Такой прибор годится для измерения как постоянного, так и переменного тока. Объясните, почему показание амперметра пропорционально тепловой мощности, выделяемой в проводнике R.

Таким образом, переменный ток $I = I_0 \sin \omega t$ мы будем измерять тепловым амперметром. Покажите, что измеренное значение равно

$$\overline{I} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}\,;$$

эта величина называется *эффективным значением тока*. Она равна силе постоянного тока, мощность которого равна средней мощности нашего переменного тока; иными словами, постоянный ток $\overline{I}$ вызовет то же самое показание амперметра, что и наш переменнный.

[Овчинкин] $\to$ 4.64.

Задача 11. Покажите, что среднее значение на луче $[0; \infty)$ производной функции, ограниченной на этом луче, равно нулю.

Задача 12. Вернёмся к задаче 4.64 из Овчинкина. Теперь она решается в одну строчку! Направьте ось y от пола вверх и усредните величину $\frac{d}{dt}(my\dot{y})$.

На первый взгляд может показаться, что величина $my\dot{y}$ «с неба свалилась». Это не совсем так. На самом деле $my\dot{y}$ в данной задаче равно $\vec{r} \cdot \vec{p}$, то есть скалярному произведению радиус-вектора шарика на его импульс[1]. А величина $\vec{r} \cdot \vec{p}$ хорошо известна — это вспомогательное средство доказательства знаменитой *теоремы вириала*, к которой мы и переходим.

Задача 13. Рассмотрим систему материальных точек, движение которых ограничено некоторой областью пространства (иными словами, движения финитны, то есть никакая точка не

[1]Не путайте с моментом импульса, который есть векторное произведение этих же величин.

уходит на бесконечность). Пусть $\vec{r}_i$ и $\vec{p}_i$ — радиус-вектор и импульс i-й точки. Ввиду финитности движений величина

$$S = \sum \vec{r}_i \cdot \vec{p}_i$$

(где суммирование производится по всем точкам системы) является ограниченной функцией времени. Действуя как и выше, покажите, что для средней кинетической энергии системы выполнено равенство

$$\overline{K} = -\frac{1}{2}\overline{\sum \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i}, \tag{3}$$

где $\vec{F}_i$ — сила, приложенная к i-й точке. Соотношение (3) и есть теорема вириала.

Задача 14. Найдите соотношение между $\overline{K}$ и $\overline{U}$ для горизонтального пружинного маятника, совершающего гармонические колебания. Верно ли оно для вертикального пружинного маятника? Для математического маятника?

Задача 15. Найдите соотношение между $\overline{K}$ и $\overline{U}$ для замкнутой финитной системы материальных точек, взаимодействующих только гравитационными силами (например, галактики).

Примечание. Это — пункт A.4 задачи Dark Matter (IPhO, 2017). Он в ней самый дорогостоящий, и тем интереснее было бы сделать его самостоятельно (а вы сейчас полностью к этому готовы). Но если не получится, то, конечно, можно посмотреть решение.