Системы материальных точек

Если тело можно считать материальной точкой, то мы пишем для него второй закон Ньютона. А как описывать движение тела, если оно не является материальной точкой? В таком случае можно рассмотреть тело как *систему материальных точек* — разбить его на достаточно малые части, записать второй закон Ньютона для каждой из этих частей, а потом все записанные уравнения просуммировать. Мы уже продемонстрировали такой подход в листке «Импульс» для системы из двух материальных точек, а теперь обобщим его на случай, когда количество точек в системе произвольно.

Итак, пусть имеется система точек с массами m_1, m_2, ..., m_N. На i-ю точку действуют, вообще говоря, силы двух видов.

1. *Внешние силы.* Это силы взаимодействия данной точки с телами, не входящими в систему (например, сила тяжести $m_i\vec{g}$, если наша система находится во внешнем поле тяготения). Равнодействующую внешних сил, приложенных к i-й точке, обозначим $\vec{F}_i$.

2. *Внутренние силы.* Это силы взаимодействия данной точки с остальными точками системы. Силу, действующую на i-ю точку со стороны j-й точки, обозначим $\vec{T}_{ij}$.

Второй закон Ньютона, записанный для i-й точки, будет иметь вид:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{j\neq i} \vec{T}_{ij} \tag{1}$$

(суммирование ведётся по индексу j, который пробегает значения от 1 до N за исключением значения i — ведь точка не взаимодействует «сама с собой»). Теперь суммируем выражения (1) по всем точкам системы (то есть по всем значениям i от 1 до N):

$$\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{T}_{ij} \tag{2}$$

Левая часть формулы (2) равна

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \ldots + \frac{d\vec{p}_N}{dt} = \frac{d(\vec{p}_1 + \ldots + \vec{p}_N)}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

где $\vec{p} = \vec{p}_1 + \ldots + \vec{p}_N$ — суммарный вектор импульса нашей системы материальных точек.

В правой части (2), во-первых, имеем

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

— это векторная сумма внешних сил, приложенных к системе; во-вторых, сумма всех внутренних сил равна нулю:

$$\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{T}_{ij} = \vec{0}$$

(так получается потому, что указанная сумма разбивается на пары слагаемых вида $\vec{T}_{ij} + \vec{T}_{ji}$, а каждая такая пара в сумме даёт нуль по третьему закону Ньютона). В результате получаем:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}. \tag{3}$$

Таким образом, *скорость изменения импульса системы материальных точек равна сумме внешних сил, приложенных к системе.*

Если система замкнута (не взаимодействует с другими телами), то $\vec{F}_{\text{внеш}} = \vec{0}$; тогда из (3) получим и $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$, то есть $\vec{p} = \text{const}$. Это — *закон сохранения импульса* для замкнутой системы материальных точек.

Если система не замкнута, то её импульс, вообще говоря, не сохраняется. Однако может случиться, что проекция равнодействующей внешних сил на некоторую ось x равна нулю. Тогда из (3) имеем $\frac{dp_x}{dt} = 0$ и $p_x = \text{const}$, то есть сохраняется проекция вектора импульса системы на данную ось x.

Задача 1. (*«Росатом», 2016, 11*) Три точечных тела, заряженные разными зарядами, но имеющие одинаковые массы, представляют собой замкнутую систему. В некоторый момент времени тела оказываются на одной прямой, при этом ускорение одного из них (неизвестно какого — крайнего или среднего) равно a, второго (тоже неизвестно какого) — $3a$. Найти ускорение третьего тела в этот момент. Между телами действуют только кулоновские силы.

$4a$ или $2a$

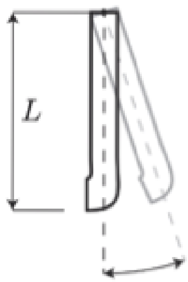
Задача 2. (*МФТИ, 1991*) Неподвижный снаряд разорвался на четыре осколка. Осколки массами $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 4$ кг полетели соответственно со скоростями $v_1 = 200$ м/с вертикально вверх, $v_2 = 150$ м/с горизонтально на север и $v_3 = 100$ м/с горизонтально на восток. Под каким углом к горизонту полетел четвёртый осколок?

$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{m_1v_1}{\sqrt{(m_2v_2)^2+(m_3v_3)^2}}\right) = \operatorname{arctg}\frac{6}{5} \approx 50^\circ$

Задача 3. (*Всеросс., 2014, МЭ, 10–11*) Приспособление, позволяющее человеку балансировать над поверхностью водоёма, состоит из платформы, к которой снизу подходит шланг. По этому шлангу насос, установленный на плавающей поблизости лодке, может прокачивать воду с максимальной скоростью $v = 7$ м/с. Вода бьёт в платформу вертикально вверх, ударяется о платформу и разлетается горизонтально во все стороны. Внутренний радиус шланга $r = 8$ см. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Человека какой массой M способно удерживать это приспособление? Массой платформы и шлангов можно пренебречь. Предложите и разъясните способ управления высотой «полёта».

$M = \frac{\rho\pi r^2v^2}{g} \approx 98{,}5$ кг

Задача 4. (*МОШ, 2019, 11*) Труба длиной L вместе с водой имеет массу M. Она прикреплена к стене таким образом, что может свободно вращаться в вертикальной плоскости. Нижний конец трубы с площадью поперечного сечения S повёрнут на 90 градусов (см. рис.). В верхнюю часть трубы наливают воду таким образом, что из нижнего конца трубы выливается вода со скоростью v. Найдите угол, на который труба отклонится от вертикали. Плотность воды известна и равна ρ.

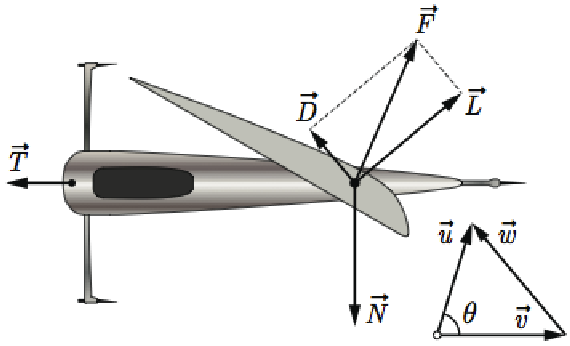


$\sin\alpha = \frac{2\rho v^2 S}{Mg}$

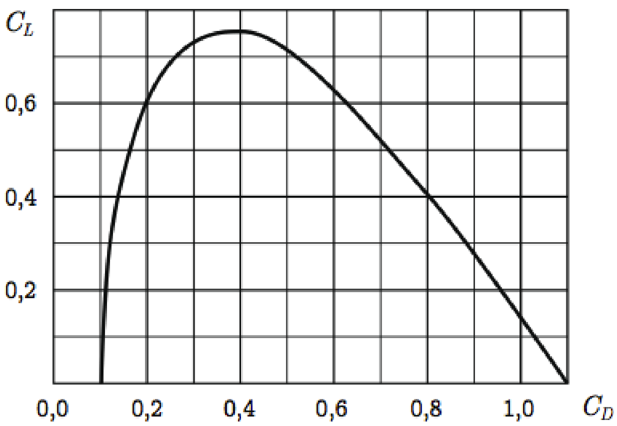
Задача 5. (*МОШ, 2019, 11*) Динамика буера (ледовой яхты, рисунок слева) может быть описана на основе модели, в которой парус считается вертикально расположенным крылом. Силу F, действующую на парус со стороны воздуха (см. правый рисунок, вид сверху), принято раскладывать на две составляющие: D, направленную вдоль скорости ω потока воздуха относительно буера, и L, перпендикулярную D. Можно считать, что $D = C_D\frac{\rho\omega^2}{2}S$, $L = C_L\frac{\rho\omega^2}{2}S$, где S —

площадь паруса, ρ — плотность воздуха; безразмерные коэффициенты C_D и C_L зависят только от ориентации паруса относительно набегающего потока воздуха. Взаимодействие с горизонтальной поверхностью снега (или льда) характеризуется силами T (трения) и горизонтальной реакции N. Далее везде трением мы пренебрегаем. Угол между скоростью буера v и скоростью ветра относительно земли u обозначим θ.

1. Пусть известно, что буер движется с постоянной скоростью. Отношение $\frac{C_L}{C_D} = k$ задано. Кроме того даны скорость ветра u и угол θ. Определите скорость буера v. Если параметр k и скорость ветра u остаются постоянными, а угол θ может изменяться от $0°$ до $90°$, то чему равна максимально возможная скорость буера v в рамках данной модели?



2. На рисунке показана кривая, координаты точек которой равны значениям коэффициентов C_D и C_L для разных положений паруса относительно набегающего потока воздуха. Определите максимально возможное ускорение буера при старте из положения покоя. Скорость ветра $u = 10$ м/с, масса буера и человека 100 кг, площадь паруса 7 м^2, атмосферное давление нормальное, температура воздуха $-10\,°$C.



3. Используя кривую, показанную на рисунке, определите при каких значениях угла θ возможно движение буера с постоянной скоростью.

1) $v = u(\cos\theta + k\sin\theta)$, $v_{\max} = u\sqrt{k^2+1}$; 2) $a_{\max} = \frac{1{,}1\rho u^2 S}{2m} \approx 5$ м/с^2; 3) $0° < \theta < 162° \pm 2°$