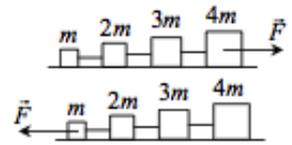


## Связанные тела

[Овчинкин] → 2.2, 2.3, 2.4, 2.10, 2.11.

ЗАДАЧА 1. («Росатом», 2011, 11) Четыре тела с массами  $m$ ,  $2m$ ,  $3m$  и  $4m$ , находящиеся на гладкой горизонтальной поверхности, связаны невесомыми и нерастяжимыми нитями. На систему тел действует внешняя горизонтальная сила  $\vec{F}$ : один раз — на тело массой  $m$ , второй раз — на тело массой  $4m$ . Найти отношение сил натяжения нитей, связывающих грузы  $m$  и  $2m$ , в первом и втором случаях.

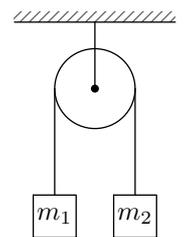


6 : 1

ЗАДАЧА 2. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) Три одинаковых груза массы  $m = 100$  г связаны попарно (1-й со 2-м, 2-й с 3-м) двумя лёгкими нерастяжимыми нитями. Верхний груз поднимают вверх с ускорением  $a = 5$  м/с<sup>2</sup>, два других поднимаются за ним. На сколько ньютонов различаются силы натяжения верхней и нижней нити? Ускорение свободного падения  $g \approx 10$  м/с<sup>2</sup>.

Н 5 : 1 Н

ЗАДАЧА 3. (Машина Атвуда) Грузы массами  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ) прикреплены к нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный блок (см. рисунок). Система предоставлена самой себе. Найдите ускорение грузов, силу натяжения нити  $T$  и вес системы  $P$  (силу давления на ось блока). Массами нити и блока пренебречь. Трение в системе отсутствует.



$$Lz = J \cdot g \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} = J \cdot g \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} = v$$

ЗАДАЧА 4. («Физтех», 2017, 9) Два груза массами  $m_1 = 49$  г и  $m_2 = 51$  г висят в поле тяжести на длинной нити, перекинутой через лёгкий блок, который может вращаться без трения. В начальный момент грузу  $m_1$  сообщается скорость  $v_0 = 20$  см/с, направленная вниз, а грузу  $m_2$  сообщается такая же скорость, направленная вверх.

- 1) Найти ускорение грузов.
- 2) Найти максимальное смещение груза  $m_1$  вниз.
- 3) Найти путь  $S$ , пройденный грузом  $m_1$  через время  $\tau = 3$  с после начала его движения. Ускорение свободного падения считать равным  $10$  м/с<sup>2</sup>.

$$m_2 g = S \left( g \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} = \frac{v_0^2}{2a} = \tau x \right) \Rightarrow \tau = \frac{v_0^2}{2a} = g \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} = v$$

ЗАДАЧА 5. («Курчатов», 2017, 9–10) Невесомая нерастяжимая нить перекинута через идеальный неподвижный блок. К концам нити подвешены небольшие грузы: к правому — груз массой  $m_1$ , к левому — груз массой  $m_2$ ,  $m_1 > m_2$ . Изначально грузы удерживают неподвижно на одном уровне, затем их отпускают.

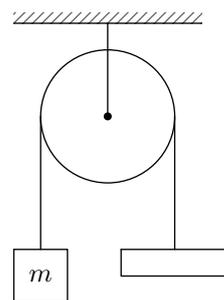
(9) Найдите скорости (модуль и направление) грузов в момент, когда расстояние между ними по вертикали составит  $h$ .

(10) Через какое время  $t$  после начала движения грузов расстояние между ними по вертикали составит  $h$ ?

Ускорение свободного падения  $g$ , трение пренебрежимо мало.

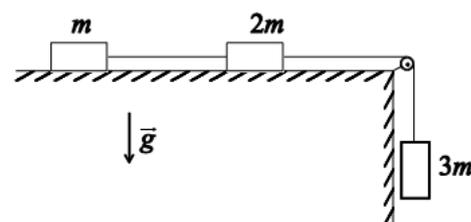
$$\frac{b(\tau u - \nu u)}{y(\tau u + \nu u)} \wedge = \tau \nu b \frac{\tau u + \nu u}{\tau u - \nu u} \wedge = a$$

ЗАДАЧА 6. (МФТИ, 2007) На достаточно длинной невесомой нити, перекинутой через блок, подвешены два груза (см. рисунок). Грузам сообщили некоторую начальную скорость, и систему предоставили самой себе. В некоторый момент скорость левого груза массой  $m = 1$  кг направлена вниз и равна  $v = 4$  м/с. Через время  $t = 2$  с после этого груз остановился. Определите силу натяжения нити. Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



$$H \tau I = \left(\frac{\tau}{a} + b\right) u = L$$

ЗАДАЧА 7. («Физтех», 2016, 9) Два груза массами  $m$  и  $2m$ , находящиеся на гладком горизонтальном столе, связаны нитью и соединены с грузом массой  $3m$  другой нитью, перекинутой через невесомый блок (см. рисунок). Трением в оси блока можно пренебречь.

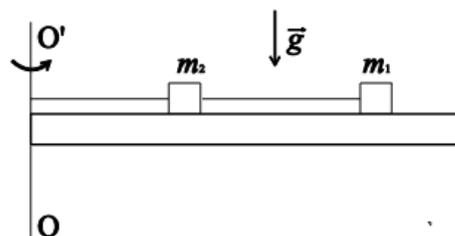


1) Найти ускорение грузов.

2) Во сколько раз сила натяжения нити между грузами на столе меньше силы натяжения другой нити?

$$(1) a = \nu \quad (2) \tau / b = \nu$$

ЗАДАЧА 8. («Физтех», 2016, 9) Два небольших по размерам бруска находятся на гладкой горизонтальной платформе. Бруски связаны нитью и привязаны другой нитью к оси  $OO'$  (см. рисунок). Расстояния брусков от оси  $OO'$  отличаются в 3 раза. Отношение масс брусков  $m_2/m_1 = 3$ . Система вращается вокруг вертикальной оси  $OO'$ . Найдите отношение сил натяжения нитей между осью  $OO'$  и бруском  $m_2$  и между грузами.



$$\tau = \nu L / \tau L$$

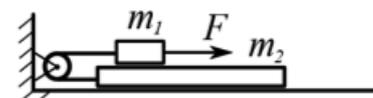
ЗАДАЧА 9. («Физтех», 2018, 10) Систему из бруска массой  $m_1 = m$  и доски массой  $m_2 = 2m$ , находящихся на горизонтальном столе, приводят в движение, прикладывая к доске горизонтальную силу  $F$  (см. рис.). Коэффициент трения между столом и доской и между горизонтальной поверхностью доски и бруском равен  $\mu$ . Массой горизонтально натянутой нити, массой блока и трением в его оси пренебречь.



- 1) Найти ускорение  $a_1$  доски, если бы не было трения.
- 2) Найти ускорение  $a_2$  доски, если есть трение и параметры  $F$ ,  $m$ ,  $\mu$  подобраны так, что есть движение.

$$\frac{m\mu}{2m\mu g - F} = \tau v \quad (2) \quad \frac{m\mu}{F} = \tau v \quad (1)$$

ЗАДАЧА 10. («Физтех», 2018, 10) Систему из бруска массой  $m_1 = 3m$  и доски массой  $m_2 = m$ , находящихся на горизонтальном столе, приводят в движение, прикладывая к бруску горизонтальную силу  $F$  (см. рис.). Коэффициент трения между столом и доской и между горизонтальной поверхностью доски и бруском равен  $\mu$ . Массой горизонтально натянутой нити, массой блока и трением в его оси пренебречь.

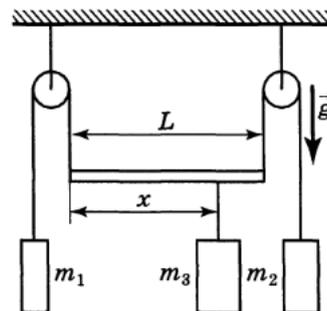


- 1) Найти ускорение  $a_1$  бруска, если бы не было трения.
- 2) Найти ускорение  $a_2$  бруска, если есть трение и параметры  $F$ ,  $m$ ,  $\mu$  подобраны так, что есть движение.

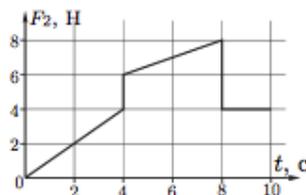
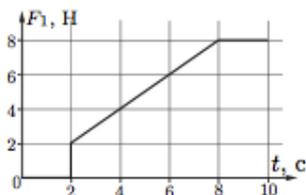
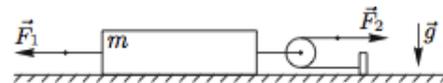
$$\frac{m\mu}{3m\mu g - F} = \tau v \quad (2) \quad \frac{m\mu}{F} = \tau v \quad (1)$$

ЗАДАЧА 11. (Всеросс., 1995, ОЭ, 9) Система, изображённая на рисунке, предоставлена самой себе. При этом оказалось, что невесомый брус длины  $L = 1$  м движется вверх с ускорением  $g/2$ , оставаясь всё время в горизонтальном положении. Определите расстояние  $x$ , на котором подвешено тело массы  $m_3$ , если известно, что  $m_1 = 2$  кг,  $m_2 = 3$  кг. Трением можно пренебречь.

$$\pi g'0 = \frac{\tau u + \Gamma u}{\Gamma \tau u} = x$$



ЗАДАЧА 12. (Всеросс., 2014, РЭ, 9) К системе, приведённой на рисунке справа, прикладывают в указанном направлении внешние силы  $F_1$  и  $F_2$ , графики зависимости которых от времени даны на рисунках снизу. Масса бруска  $m = 1$  кг, коэффициент трения между плоскостью и бруском  $\mu = 0,4$ , ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Нити лёгкие, нерастяжимые и длинные. Блок невесомый. На какое расстояние переместится брусок за 10 секунд, если изначально он покоится?



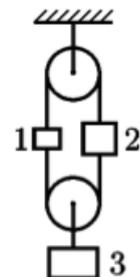
п 9г

ЗАДАЧА 13. (Всеросс., 2009, РЭ, 10) В установке (рис.) масса динамометра равна  $M$ , а массы грузов —  $m_1$  и  $m_2$ . Коэффициент трения между динамометром и поверхностью стола равен  $\mu$ . Участки  $AB$  и  $CD$  нити горизонтальны. Массами обеих нитей, блоков, а также пружинки можно пренебречь. Найдите показания динамометра, если они постоянны.



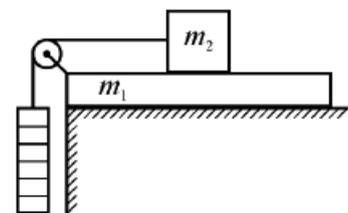
$$\left. \begin{aligned} &Nt + \tau u < \tau u \text{ игсэ} & \left\{ \begin{aligned} &\frac{N + \tau u + \tau u}{N(t-1) + \tau u} \delta \tau u \\ &\frac{N + \tau u + \tau u}{N(t+1) + \tau u} \delta \tau u \end{aligned} \right\} = d \\ &Nt + \tau u < \tau u \text{ игсэ} & \\ &Nt \geq |\tau u - \tau u| \text{ игсэ} & \end{aligned} \right\} = d$$

ЗАДАЧА 14. (МОШ, 2007, 10) В системе, изображённой на рисунке, грузы 1 и 2 прикреплены к нитям, массы грузов 1, 2 и 3 равны  $M$ ,  $2M$  и  $3M$  соответственно. Найдите их ускорения. Трение отсутствует. Блоки невесомы, нити невесомы и нерастяжимы, не лежащие на блоках участки нитей вертикальны.



$$\left[ \text{Проекция на ось, направленную вертикально вверх: } a_1 = -\frac{g}{2}, a_2 = \frac{g}{2}, a_3 = g \right]$$

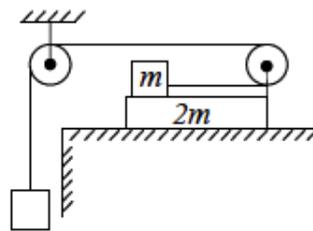
ЗАДАЧА 15. (МОШ, 2017, 10) На горизонтальном столе лежит доска массой  $m_1 = 1$  кг, на которой находится брусок массой  $m_2 = 2$  кг. К бруску привязана лёгкая нерастяжимая нить, второй конец которой перекинут через идеальный блок, закреплённый на краю доски. Коэффициент трения между доской и бруском  $\mu = 0,2$ . Вертикальный участок нити начинают аккуратно нагружать одинаковыми гирьками массами  $\Delta m = 75$  г каждая. При каком минимальном количестве  $n$  гирек система придёт в движение? Найдите модули и направления ускорений, с которыми в этом случае начнут двигаться доска и брусок. Трением между доской и поверхностью стола можно пренебречь, модуль ускорения свободного падения можно принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



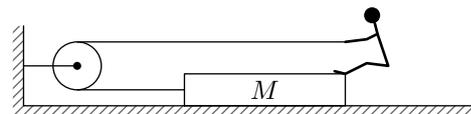
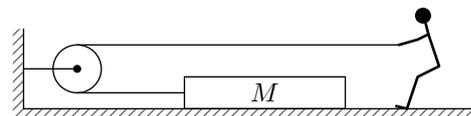
$$\left[ \text{вправо) } a_2 \approx 0,3 \text{ м/с}^2; \text{ (влево) } a_1 \approx 0,17 \text{ м/с}^2 \text{ (влево)} \right]$$

Задача 16. (МОШ, 2017, 11) На доске массой  $2m$  лежит брусок массой  $m$ . Коэффициент трения между доской и столом  $\mu$ , а между доской и грузом —  $4\mu$ . При какой минимальной массе  $M$  груза, прикрепленного к вертикальному участку нити, начнётся проскальзывание между доской и бруском?

$$\frac{m - \mu}{4\mu m g} = N$$

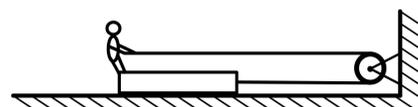


Задача 17. (МФТИ, 1998) Человеку массой  $m$  требуется подтянуть к стене ящик массой  $M = 3m$  с помощью каната, перекинутого через блок. Если человек стоит на горизонтальном полу, то для достижения цели ему нужно тянуть канат с минимальной силой  $F_1 = 600$  Н (см. рисунок). С какой минимальной силой  $F_2$  придётся тянуть этому человеку канат, если он упрётся в ящик ногами? Части каната, не соприкасающиеся с блоком, горизонтальны. Массами блока и каната пренебречь.



$$F_2 = \frac{M + m}{2} F_1 = \frac{3m + m}{2} \cdot 600 = 1200 \text{ Н}$$

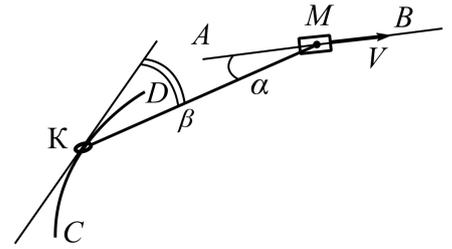
Задача 18. («Физтех», 2020, 10) Человеку, упирающемуся в ящик ногами, надо передвинуть ящик из состояния покоя по горизонтальному полу на расстояние  $S$  к стене (см. рис.). Массы человека и ящика равны соответственно  $m$  и  $M = 5m$ . Натянутые части каната, не соприкасающиеся с блоком, горизонтальны. Массами каната, блока и трением в оси блока можно пренебречь. Коэффициент трения между ящиком и полом  $\mu$ .



1. С какой силой ящик с человеком давят на пол при движении ящика?
2. С какой минимальной постоянной силой  $F_0$  надо тянуть человеку канат, чтобы осуществить задуманное?
3. Какой скорости достигнет ящик, если человек осуществит задуманное, приложив постоянную силу  $F$  ( $F > F_0$ ) к канату?

$$\left( 6m - \frac{5m}{F} \right) S \sqrt{g} = N \quad (g : 6m \cdot g = 0 \quad (2) \quad F_0 (2) : 6m \cdot g = g(m + N) = N \quad (1)$$

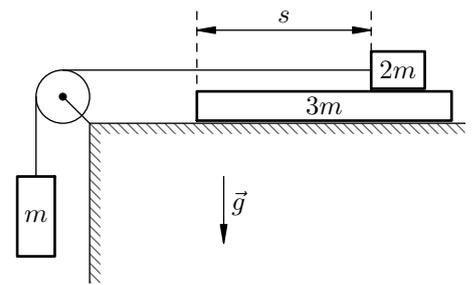
ЗАДАЧА 19. («Физтех», 2020, 11) Муфту  $M$  двигают со скоростью  $V = 68$  см/с по горизонтальной направляющей  $AB$  (см. рис.). Кольцо  $K$  массой  $m = 0,1$  кг, может двигаться без трения по проволоке  $CD$  в виде дуги окружности радиусом  $R = 1,9$  м. Кольцо и муфта связаны лёгкой нитью длиной  $l = \frac{5R}{3}$ . Система находится в одной горизонтальной плоскости. В некоторый момент нить составляет угол  $\alpha$  ( $\cos \alpha = 15/17$ ) с направлением движения муфты и угол  $\beta$  ( $\cos \beta = 4/5$ ) с направлением движения кольца.



1. Найти скорость кольца в этот момент.
2. Найти скорость кольца относительно муфты в этот момент.
3. Найти силу натяжения нити в этот момент.

$$v_K = 0,1 \cdot 68 = 6,8 \text{ м/с} = 6,8 \text{ м/с} \cdot \frac{1}{10} = 0,68 \text{ м/с} \quad \text{или} \quad v_K = 0,1 \cdot 68 \cdot \frac{1}{10} = 0,68 \text{ м/с}$$

ЗАДАЧА 20. (МФТИ, 2001) Систему из груза массой  $m$ , бруска массой  $2m$  и доски массой  $3m$  удерживают в покое (см. рисунок). Брусок находится на расстоянии  $s = 49$  см от края доски. Систему отпускают, и брусок движется по доске, а доска — по горизонтальной поверхности стола. Коэффициент трения скольжения между бруском и доской  $\mu_1 = 0,35$ , а между доской и столом  $\mu_2 = 0,10$ .



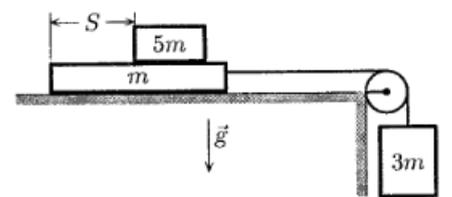
1) Определить ускорение бруска относительно стола при движении бруска по доске.

2) Через какое время брусок достигнет края доски?

Считать, что за время опыта доска не достигает блока. Массу нити, блока и трение в оси блока не учитывать.

$$a = \frac{g(\mu_2 + \mu_1 \mu_2 - 1)}{s} \approx 0,1 \text{ м/с}^2 \quad \text{или} \quad a = \frac{g(\mu_2 + \mu_1 \mu_2 - 1)}{s} = 0,1 \text{ м/с}^2$$

ЗАДАЧА 21. (МФТИ, 2001) Систему из доски массой  $m$ , бруска массой  $5m$  и груза массой  $3m$  удерживают в покое (см. рисунок). Затем систему отпускают, и доска движется по горизонтальной поверхности стола, а брусок движется по доске. Через время  $t = 1,4$  с брусок достигает края доски, а доска ещё не доходит до блока. Коэффициент трения скольжения бруска о доску  $\mu_1 = 0,1$ , а доски о стол  $\mu_2 = 0,3$ .



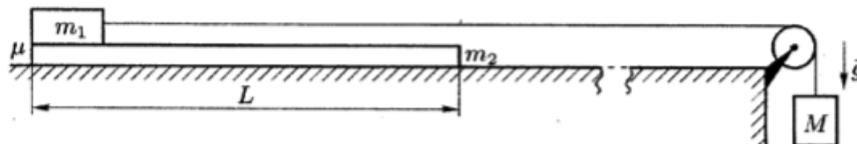
1) Определить ускорение бруска относительно стола при движении бруска по доске.

2) На каком расстоянии от края доски находился брусок до начала движения?

Массу нити, блока и трение в оси блока не учитывать.

$$a = \frac{g(\mu_2 + \mu_1 \mu_2 - 1)}{s} \approx 0,1 \text{ м/с}^2 \quad \text{или} \quad a = \frac{g(\mu_2 + \mu_1 \mu_2 - 1)}{s} = 0,1 \text{ м/с}^2$$

ЗАДАЧА 22. (Всеросс., 2010, финал, 10) На длинном гладком горизонтальном столе лежит доска массы  $m_2$  и длины  $L$ , на левом конце которой находится груз массы  $m_1$ . Коэффициент трения между грузом и доской равен  $\mu$ . Трение между доской и столом отсутствует. Груз  $m_1$  связан с грузом  $M$  длинной невесомой нитью, перекинутой через невесомый блок (рис.). Система начинает двигаться из состояния покоя.



1) При каких значениях коэффициента трения  $\mu$  груз  $m_1$  и доска  $m_2$  будут двигаться как единое целое (без проскальзывания)?

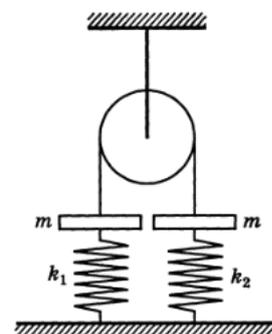
2) Найдите минимальное значение коэффициента трения  $\mu_{\min}$ , при котором возможно движение без проскальзывания.

3) Пусть  $\mu = \mu_{\min}/2$ . В этом случае груз  $m_1$  и доска  $m_2$  будут двигаться с разными ускорениями. Через какое время  $t$  после начала движения груз соскользнёт с доски?

Считайте, что  $m_1 = M = 1$  кг,  $m_2 = 2$  кг. Длину доски  $L$  примите равной 1 м. Известно, что длина груза много меньше  $L$ . Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

$$\frac{6}{5} g = \frac{1}{2} (g - \frac{2m_1 + 1m_2 + 1M}{2m_1 m_2}) \frac{1}{2} m_1 = \frac{1}{2} m_1 a \leq \frac{1}{2} (1)$$

ЗАДАЧА 23. (Всеросс., 1994, финал, 10) Система грузов изображена на рисунке. Пружины одним концом прикреплены к неподвижной опоре, а другим — к грузам массы  $m$ . Блок и нить в этой системе невесомы, а пружины изначально не деформированы. Левый груз опускают вниз на расстояние  $x$  и затем без толчка отпускают. Найдите ускорения грузов сразу после того, как его отпустили. Жёсткости пружин равны  $k_1$  и  $k_2$ , причем  $k_1 > k_2$ .



$$F_{\text{спр}} x = \frac{2m}{k_1 + k_2} g, \text{ где } a_1 = a_2 = \frac{2m}{k_1 + k_2} g, \text{ где } a_1 = a_2 = \frac{2m}{k_1 + k_2} g, \text{ где } a_1 = a_2 = \frac{2m}{k_1 + k_2} g, \text{ где } a_1 = a_2 = \frac{2m}{k_1 + k_2} g$$

ЗАДАЧА 24. («Росатом», 2014, 9–10) Два стержня соединены в форме буквы «Г». Один из стержней расположен горизонтально, другой — вертикально. На стержни надеты маленькие невесомые колечки, которые могут без трения перемещаться по стержням. К колечкам прикреплена невесомая нить. На нить надета массивная бусинка, которая может без трения перемещаться по нити. В начальный момент бусинку удерживают так, что нить натянута, длина её горизонтального участка равна  $l$ , а вертикального —  $2l$ . Бусинку отпускают. Найдите её ускорение. Через какое время бусинка достигнет вертикального стержня?



$$\frac{6}{5} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \frac{2l}{b} = v$$

Задача 25. (МОШ, 2018, 10) Через шершавый цилиндрический шкив радиусом  $R$  с горизонтальной осью вращения была перекинута длинная невесомая и нерастяжимая верёвка, к концам которой прикреплены грузы массами  $m$  и  $5m$ . Шкив, приводимый в движение электромотором, равномерно вращался с угловой скоростью  $\omega$ , и грузы висели на одном уровне, не смещаясь по вертикали. В момент времени  $t = 0$  направление вращения шкива быстро изменилось на противоположное.

- 1) Какую мощность развивал электромотор до смены направления вращения шкива?
- 2) С какими по модулю ускорениями сразу после смены направления вращения двигались грузы?
- 3) Как модули ускорений грузов зависели от времени после смены направления вращения шкива?

*Примечание:* отношение модулей сил натяжения лёгкой верёвки по разные стороны от шкива зависит только от коэффициента трения между шкивом и верёвкой.

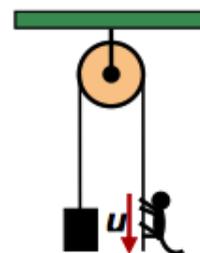
$$\left. \begin{array}{l} \frac{g}{\omega R} \leq t \text{ нгсэ} \\ \frac{g}{\omega R} > t > 0 \text{ нгсэ} \end{array} \right\} = v \text{ ; } \frac{g}{\omega R} = v \text{ ( } \omega R v m \mu = N \text{ )}$$

## Обезьяна и груз

[Овчинкин] → 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17.

В интернете можно почитать различные обсуждения задачи Льюиса Кэрролла «Обезьяна и груз»: *Через блок, прикрепленный к потолку, переброшен канат. На одном конце каната висит обезьяна, к другому прикреплен груз, вес которого в точности равен весу обезьяны. Предположим, что обезьяна начала взбираться вверх по канату. Что произойдет при этом с грузом?* [Ю. А. Данилов, Я. А. Смородинский. Физик читает Кэрролла]

Задача 26. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 7–9) Легкая нерастяжимая веревка перекинута через легкий блок, вращающийся без трения. На одном конце веревки прикреплен груз, который удерживают на месте. На другом конце неподвижно повисла обезьянка. В некоторый момент времени обезьянка начинает, перебирая лапами, вытягивать мимо себя веревку с постоянной скоростью  $u = 2$  м/с, и сразу после этого груз аккуратно отпускают. Спустя какое время скорости обезьянки и груза окажутся равны? Масса обезьянки на 10% больше массы груза. Веревка по блоку не скользит, ускорение свободного падения  $g \approx 10$  м/с<sup>2</sup>.



$$t = \frac{2}{g} = 2,1 \text{ с}$$