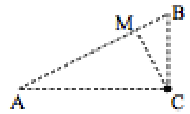
Напряжённость электрического поля

Задача 1. (*«Росатом», 2011, 11*) Точечный заряд, расположенный в точке C, создаёт в точках A и B поле с напряжённостью E_A и E_B соответственно (см. рисунок; угол ACB — прямой). Найти напряжённость электрического поля, создаваемого этим зарядом в точке M, являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AB.



$\boxed{E_M = E_A + E_B}$

Задача 2. (*Савченко, 6.1.17*) Чему равна напряжённость электрического поля в центре равномерно заряженного тонкого кольца радиуса R? Чему она равна на оси кольца на расстоянии h от центра? Заряд кольца Q.

$\boxed{E = \frac{kQh}{(R^2+h^2)^{3/2}}}$

Задача 3. Найдите напряжённость поля в центре равномерно заряженной полусферы. Поверхностная плотность заряда равна σ.

Указание. Смотрите картинку.

$\boxed{E = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}}$

Задача 4. (*«Росатом», 2011, 11*) Две равномерно заряженные полусферы расположены так, что они имеют общий центр, и одна из них вложена в другую (см. рисунок; внутренняя полусфера показана пунктиром). Радиусы полусфер равны R и $3R$, заряды — Q и $2Q$ соответственно. Найти силу взаимодействия полусфер.

$\boxed{F = \frac{kQ^2}{9R^2}}$

Задача 5. (*МОШ, 2008, 10*) В вершинах правильного N-угольника расположены последовательно электрические заряды, величины которых образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2 и равны q, $2q$, …, $2^{N-1}q$. Расстояние от центра многоугольника до любой из его вершин равно R. Найдите величину E напряжённости электрического поля в центре многоугольника.

$\boxed{E = \frac{2^N-1}{\sqrt{5-4\cos\frac{2\pi}{N}}}\frac{kq}{R^2}}$

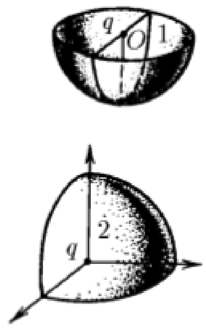
Задача 6. (*МОШ, 2008, 11*) В вершинах правильного N-угольника расположены последовательно электрические заряды, величины которых образуют арифметическую прогрессию с разностью q и равны q, $2q$, …, Nq. Расстояние от центра многоугольника до любой из его вершин равно R. Найдите величину напряжённости E электрического поля в центре многоугольника.

$\boxed{E = \frac{N}{2\sin\frac{\pi}{N}}\frac{kq}{R^2}}$

Задача 7. (*Савченко, 6.1.21; МОШ, 2009, 10*) Тонкое проволочное кольцо разорвалось, когда нанесённый на него заряд превысил q. Какой заряд можно нанести на второе кольцо, радиус которого в n раз больше, а прочность проволоки на разрыв в k раз выше, чем у проволоки первого кольца, чтобы второе кольцо не разорвалось?

$\boxed{Q \leqslant qn\sqrt{k}}$

Задача 8. (*Савченко, 6.5.8*) а) В центр равномерно заряженной полусферы, поверхностная плотность заряда которой σ, поместили заряд q. С какой силой этот заряд действует на полусферу? на половину полусферы (1)? на четвёртую её часть (2)? Определите напряжённость электрического поля от этих частей сфер в её центре.



б) Определите напряжённость электрического поля в центре равномерно заряженного полушария радиуса R с объёмной плотностью заряда ρ.

$\boxed{\text{а) } E_0 = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0},\ E_1 = \frac{\sigma\sqrt{2}}{8\varepsilon_0},\ E_2 = \frac{\sigma\sqrt{3}}{16\varepsilon_0};\ \text{б) } E = \frac{\rho R}{4\varepsilon_0}}$

Задача 9. (*Савченко, 6.1.18*) Чему равна напряжённость электрического поля равномерно заряженной нити длины l на прямой, которая является продолжением нити, на расстоянии a от ближайшего её конца? Линейная плотность заряда нити равна ρ.

$\boxed{E = \frac{k\rho l}{a(l+a)}}$

Телесный угол

Для начала обсудим хорошо известные вам вещи. Рассмотрим окружность радиуса R с центром O и дугу AB этой окружности. Как мы знаем, *плоский угол* AOB — это часть плоскости, которая служит объединением всех лучей с началом O, пересекающих дугу AB. Величина α этого угла (в радианах) есть отношение длины l дуги AB к радиусу окружности:

$$\alpha = \frac{l}{R}\,. \tag{1}$$

Ясно, что это определение корректно: оно не зависит от величины радиуса окружности. В самом деле, если радиус окружности с центром O изменится в k раз, то длина l дуги, вырезаемой на окружности данным плоским углом, также изменится в k раз, и отношение $\alpha = l/R$ останется прежним. Иными словами, величина α, определяемая с помощью окружности, является характеристикой самого угла и от окружности не зависит. Если имеется один лишь плоский угол, а никакой окружности изначально нет, то для нахождения α мы можем взять любую окружность с центром в вершине угла и воспользоваться формулой (1).

Теперь перенесём эти рассуждения на пространственный случай. Рассмотрим сферу радиуса R с центром O. Выберем на ней область D, ограниченную замкнутым контуром γ, и возьмём объединение всех лучей с началом O, пересекающих область D. В результате получим *телесный угол* $O\gamma$, величина которого (в *стерадианах*) определяется как

$$\Omega = \frac{S}{R^2}\,, \tag{2}$$

где S — площадь области D.

Таким образом, телесный угол $O\gamma$ — это часть пространства, ограниченная конической поверхностью, заметаемой лучом OM, когда точка M пробегает контур γ. При этом контур γ на самом деле не обязан лежать на какой-либо сфере (например, он может быть треугольником или квадратом — такие ситуации как раз и возникнут ниже в задачах). Телесный угол обладает «собственной геометрией»; как и плоский угол, он является «самостоятельной» геометрической фигурой; однако для нахождения его величины по формуле (2) понадобится вспомогательная сфера с центром O.

Задача 10. Объясните, почему определение (2) корректно (иными словами, почему величина Ω данного телесного угла не зависит от выбора вспомогательной сферы).

Задача 11. Полный плоский угол равен 2π радиан. А сколько стерадиан составляет полный телесный угол?

Задача 12. Точка P не лежит в плоскости α. Под каким телесным углом видна плоскость α из точки P?

Задача 13. Снова рассмотрим плоскость α. Пусть $A \in \alpha$, $P \notin \alpha$ и прямая PA образует острый угол θ с нормалью к плоскости α. Пусть R — длина отрезка PA. Окружим точку A малым контуром γ, лежащим в плоскости α (длина этого контура много меньше R) — получим малый телесный угол $P\gamma$. Объясните, почему величина этого телесного угла даётся формулой

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2}\cos\theta,$$

где dS — площадь части плоскости, ограниченной контуром γ.

Задача 14. (*Савченко, 6.1.19*) Докажите, что составляющая напряжённости электрического поля, перпендикулярная поверхности равномерно заряженного участка плоскости, равна

$$E_\perp = \frac{\sigma\Omega}{4\pi\varepsilon_0},$$

где Ω — телесный угол, под которым виден этот участок из рассматриваемой точки пространства, σ — поверхностная плотность заряда. Определите, пользуясь этим, напряжённость электрического поля:

а) в центре куба, пять граней которого равномерно заряжены с поверхностной плотностью заряда σ, а одна грань не заряжена;

б) в центре правильного тетраэдра, три грани которого заряжены с поверхностной плотностью σ_1, а четвёртая — с поверхностной плотностью заряда σ_2;

в) равномерно заряженной плоскости, если поверхностная плотность заряда σ;

г) на оси длинной трубы с сечением в виде правильного треугольника, если поверхностная плотность заряда граней треугольника трубы равна соответственно σ_1, σ_2, σ_3;

д) в вершине конуса с углом при вершине α и высоты h, равномерно заряженного с объёмной плотностью заряда ρ;

е) на ребре длинного бруска, равномерно заряженного с объёмной плотностью заряда ρ; поперечное сечение бруска — правильный треугольник со стороной a.

См. конец листка

Задача 15. (*МОШ, 2009, 11*) Три прилегающие друг к другу грани кубика заряжены равномерно с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$, а остальные грани — с плотностью заряда $-\sigma$. Найти напряжённость $\vec{E}$ электрического поля в центре кубика.

$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\sqrt{3}}}$

Ответ к задаче 14

а) $E = \frac{\sigma}{6\varepsilon_0}$;

б) $E = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{4\varepsilon_0}$;

в) $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$;

г) $E = \frac{1}{3\varepsilon_0}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3}$;

д) $E = \frac{\rho h}{2\varepsilon_0}(1 - \cos\alpha)$;

е) $E = \frac{\rho a\sqrt{3}}{12\varepsilon_0}$.