Теория относительности

Задачники: *Я* — [Яковлев], *О* — [Овчинкин], *С* — [Савченко], *К* — [Козел].

Удобные стандартные обозначения: $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Задача 1. Распространение сигналов: *Я — 723, 728*; *К5.4*.

Относительность расстояний и промежутков времени

Задача 2. Замедление времени: *Я — 724, 725*; *О — 8.5, 8.6, 8.12*.

Задача 3. Лоренцево сокращение: *Я — 726, 731, 733*; *О8.4*.

Задача 4. *К — 5.10, 5.14*.

Задача 5. Решите *О8.11* двумя способами:
1) в системе отсчёта Вани;
2) в системе отсчёта Пети.

Преобразования Лоренца

Задача 6. Используя формулу лоренцева сокращения, получите преобразования Лоренца. Запишите преобразования Лоренца в терминах β и γ.

Задача 7. Теорию можно строить и по-другому — а именно, получить преобразования Лоренца напрямую из постулатов теории относительности (минуя промежуточное установление фактов замедления времени и сокращения длины), опираясь лишь на самые общие предположения об однородности и изотропности пространства, а также однородности времени. Если интересно, смотрите [Сивухин, §105].

Предположим, что преобразования Лоренца уже установлены. Покажите теперь, как из них вытекают эффекты сокращения длины и замедления времени.

Задача 8. *Я — 730, 734*.

Задача 9. Решите *О8.7* двумя способами:
1) в системе отсчёта корабля;
2) в системе отсчёта маяков.

Задача 10. Решите *О8.13* двумя способами:
1) в системе отсчёта Земли;
2) в системе отсчёта кораблей.

Задача 11. *О — 8.3, 8.8, 8.10, 8.14*.

Задача 12. *Я — 735, 736*.

Задача 13. *О8.17* — досконально разберитесь в решении.

Эффект Доплера

Задача 14. Продольный эффект Доплера: *Я729*, *О8.9*.

Задача 15. (*Эффект Доплера*) Рассмотрим неподвижную систему K, в которой наряду с декартовыми координатами Oxy будем использовать полярные координаты:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Звездолёт летит со скоростью v вдоль прямой $y = a$ $(a > 0)$ в положительном направлении оси x. На борту звездолёта работает источник радиоимпульсов, который посылает короткие сигналы с интервалом T_0 (по часам звездолёта). Считайте, что сигналы идут достаточно часто: $vT_0 \ll a$. Приёмник сигналов, расположенный в начале координат O, регистрирует интервал времени T между импульсами. Найдите зависимость $T(\varphi)$:

1) в нерелятивистском случае;

2) в релятивистском случае.

$\boxed{1)\ T = T_0(1+\beta\cos\varphi);\ 2)\ T = \gamma T_0(1+\beta\cos\varphi)}$

Релятивистский закон сложения скоростей

Задача 16. Вывод закона: *Я739*.

Замечание. Полностью аналогичную процедуру — но уже для ускорений — вам нужно будет проделать в задаче 32 (APhO-2013).

Задача 17. *Я — 740, 741, 742*; *К — 5.2, 5.3*.

Задача 18. (*Гиперболические функции*) Формулу

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

можно переписать в виде

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}\,.$$

Напоминает формулу тангенса суммы, но там — минус в знаменателе. Однако аналогия работает, только вместо тригонометрических функций возникают гиперболические:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\,.$$

- Постройте графики этих функций (с указанием асимптот).
- Покажите, что справедливы следующие формулы:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

- Выведите формулы сложения:

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

  и из них —

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}\,.$$

- Убедитесь, что для любого $\beta = \frac{v}{c}$ существует единственное число α такое, что $\beta = \operatorname{th}\alpha$; при этом релятивистскому закону сложения скоростей v_1 и v_2 отвечает обычное сложение соответствующих чисел α_1 и α_2.

Аберрация света

Задача 19. 1) Покажите, что

$$v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{Vv'_x}{c^2}}$$

(обозначения и соглашения — как в Приложении *Я* на с. 285).

2) *Я743*.

Групповое свойство преобразований Лоренца

Задача 20. 1) Пусть

$$v = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}\,.$$

Скоростям v_1, v_2 и v отвечают величины β_1, β_2 и β; γ_1, γ_2 и γ. Покажите, что

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2).$$

2) *Я737*.

Интервал между событиями

Задача 21. Бывает удобно работать с переменной $\tau = ct$. Запишите преобразования Лоренца и интервал между событиями в терминах γ, β, x, τ.

Задача 22. *Я — 744, 745, 746*.

Релятивистское уравнение движения. Импульс и энергия

Задача 23. *Я — 748, 749, 750* (рассмотрите только одномерный случай).

Задача 24. *Я747*. Убедитесь также в справедливости формул

$$\vec{p} = \frac{\mathscr{E}\vec{v}}{c^2}\,, \quad \mathscr{E} = \sqrt{p^2c^2+m^2c^4}.$$

Задача 25. *Я — 766, 767, 768*.

Задача 26. *Я — 756, 757, 758, 753*.

Задача 27. *Я — 751, 752, 754*.

Задача 28. *Я755* — двумя способами:

1) через закон сохранения энергии;

2) интегрированием скорости с учётом формулы задачи *Я767*.

Столкновения и распад частиц

Задача 29. *Я — 769, 770, 771, 772*.

APhO, IPhO, Всеросс

Задача 30. Решите *K1.13*. Это пригодится для задачи 31.

Задача 31. (*APhO, 2008*)

- How does a superluminal object look like? / Как выглядит сверхсветовой объект?
- Solution.

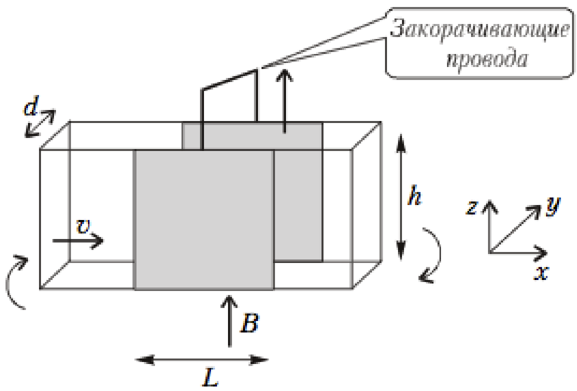
Задача 32. (*APhO, 2013*)

- Relativistic Correction on GPS Satellite / Русский перевод (плохой).
- Solution.

Задача 33. (*IPhO, 2006*)

- Watching a Rod in Motion.
- Solution.

Задача 34. (*IPhO, 2001*) Горизонтальная прямоугольная пластиковая труба шириной d и высотой h (рис.), замкнутая на себя, заполнена ртутью, удельное электрическое сопротивление которой ρ. Избыточное давление p в трубе создается турбиной, которая прокачивает жидкость по трубе с постоянной скоростью v_0. Две противоположные вертикальные стенки участка трубы длиной L изготовлены из меди. Эти пластинки снаружи соединены проводником.



Движение реальной жидкости является сложным. Для упрощения описания этого движения предположим следующее:

— несмотря на то, что жидкость вязкая, её скорость постоянна по всему сечению;

— скорость жидкости всегда пропорциональна результирующей внешней силе, действующей на неё;

— жидкость является несжимаемой.

Вертикальное однородное магнитное поле с индукцией B действует только на участке между медными пластинами.

a) Найдите силу, действующую на жидкость со стороны магнитного поля (выразите эту силу через величины L, B, h, d, ρ и скорость движения жидкости v при наличии магнитного поля). (*2 балла*)

b) Получите выражение для скорости движения жидкости v (выразив её через величины v_0, p, L, B и ρ). (*3 балла*)

c) Выведите выражение для дополнительной мощности турбины, которая должна быть приложена, чтобы обеспечить увеличение скорости до начального значения v_0. (*2 балла*)

d) Теперь магнитное поле выключено, а ртуть заменена водой, текущей по трубе с постоянной скоростью v_0. Монохроматическая электромагнитная волна частотой f распространяется вдоль трубы по направлению потока и проходит участок длиной L. Показатель преломления воды n, а $v_0 \ll c$ (где c — скорость света в вакууме). Получите выражение для дополнительной разности фаз волны на входе и выходе из рассматриваемого участка, которая возникает вследствие движения воды. (*3 балла*)

a) $F = \frac{vB^2Lhd}{\rho}$; b) $v = \frac{v_0}{1+\frac{v_0B^2L}{\rho d}}$; c) $\Delta N = \frac{v_0^2B^2Lhd}{\rho}$; d) $\Delta\varphi = 2\pi fL\left(n^2-1\right)\frac{v_0}{c^2}$

Задача 35. (*Всеросс., 2015, финал, 11*) Космический объект, движущийся вдоль некоторой прямой с постоянной скоростью, испускает периодические радиоимпульсы. Астроном установил, что за время наблюдения Δt видимое направление на этот объект изменилось на малый угол $\Delta\varphi$, а период между моментами прихода радиоимпульсов изменился от T до $T + \Delta T$, где $\Delta T \ll T$. Найдите расстояние от наблюдателя до объекта. Скорость радиоимпульсов равна скорости света c.

$r = \frac{c\Delta T\Delta t}{T(\Delta\varphi)^2}$