

## Статика

[Овчинкин] → 2.61, 2.63, 2.64.

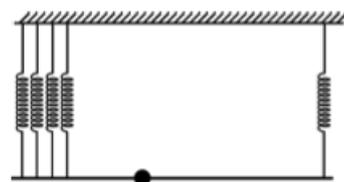
ЗАДАЧА 1. («Росатом», 2013, 7–9) Имеются рычажные весы с чашами различной массы, набор одинаковых кубиков и набор одинаковых шариков. Весы находятся в равновесии, если положить: на левую чашу 2 кубика, а на правую 3 шарика; или на левую чашу 1 шарик, а на правую 1 кубик. Какая чаша весов перевесит, если положить на левую чашу 1 кубик, а на правую 1 шарик? Ответ обоснуйте.

Левая перевесит

ЗАДАЧА 2. («Росатом», 2015, 8–9) Два груза с массами  $m_1$  и  $m_2$  уравновешены на неравноплечих весах ( $m_1 < m_2$ ). Грузы меняют местами, добавляя к грузу  $m_2$  точно такой же груз, и равновесие весов нарушается. Какой дополнительный груз следует добавить к грузу  $m_1$ , чтобы равновесие весов восстановилось?

$$m_1 = x m_2$$

ЗАДАЧА 3. (Всеросс., 2015, ШЭ, 8–9) Лёгкая прямая рейка длиной 100 см с прикрепленным к ней грузом массой 1 кг подвешена за концы: правый конец — на одной вертикальной пружине, левый — на четырёх таких же пружинах (эти четыре пружины тонкие, и поэтому можно считать, что они прикреплены к одной точке). Рейка горизонтальна, все пружины растянуты на одинаковую длину. На каком расстоянии от левого конца рейки находится груз?



20 см

ЗАДАЧА 4. (Всеросс., 2020, ШЭ, 9) Однородная деревянная линейка с миллиметровыми делениями имеет массу 20 г и длину 40 см. Отметка «0» находится на самом краю линейки. На столе лежит круглый в поперечном сечении карандаш. На этот карандаш перпендикулярно ему положили линейку. Она касается карандаша штрихом «15 см». На конце линейки с отметкой «40 см» стоит игрушка Буратино массой 10 г.

1. На какое деление линейки нужно посадить попугая Кешу (его масса 50 г), чтобы они с Буратино могли качаться на линейке, как на качелях? Ответ укажите в см, округлив до целого числа.
2. Какая сила реакции действует на линейку со стороны карандаша после того, как Кеша сел на неё, приведя линейку в горизонтальное положение? Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  Н/кг. Ответ укажите в ньютонах, округлив до десятых долей.

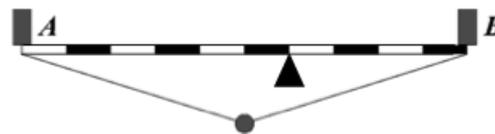
8,0 (7; 8) (1)

ЗАДАЧА 5. (Всеросс., 2017, ШЭ, 9) Небольшой грузик, покоящийся на достаточно тяжёлой однородной доске, имеющей две опоры, перенесли справа налево (так, как показано на рисунке). При этом модуль силы реакции одной из опор увеличился на  $\Delta N = 14$  Н. Определите массу  $m$  грузика. Модуль ускорения свободного падения можно считать равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



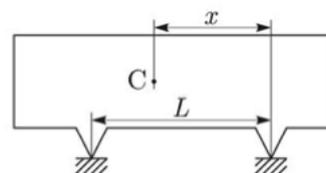
$$\Delta N = 14 = \frac{6g}{N} m = m$$

ЗАДАЧА 6. (Всеросс., 2019, ШЭ, 9) Два тела и бусинка, нанизанная на гладкую нить, которая прикреплена к концам однородного массивного рычага, уравновешены, как показано на рисунке. Найдите массу рычага, если масса груза  $A$  равна  $m$ , груза  $B$  —  $4m$ , а бусинки —  $m$ .



$$m_B = 4m$$

ЗАДАЧА 7. (Всеросс., 2014, ШЭ, 9) Расстояние между двумя опорами балки (см. рисунок) равно  $L = 2,8$  м, а расстояние между правой опорой и центром масс (к центру масс, в точке  $C$ , приложена сила тяжести) равно  $x = 2,1$  м. Для того чтобы определить массу балки, под правую опору подставили весы. Их показания составили  $M = 2400$  кг. Определите массу балки  $m$ .



$$M = 2400 = m$$

ЗАДАЧА 8. (Всеросс., 2016, ШЭ, 9–10) К концам лёгкого рычага, находящегося в равновесии, подвешены грузы: к левому концу подвешено два груза, а к правому три (см. рисунок). Затем к левому и правому концам рычага подвесили ещё по одному грузу, а точку подвеса рычага переместили на 1 см, после чего рычаг вновь оказался в равновесии. Какова длина рычага? Все грузы одинаковые.

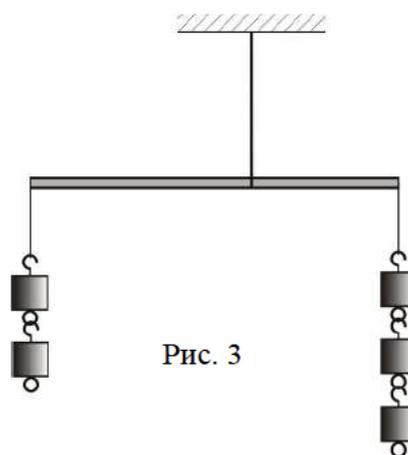
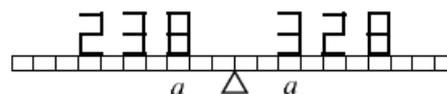


Рис. 3

$$l = 35 \text{ см}$$

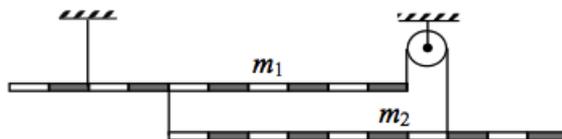
ЗАДАЧА 9. («Росатом», 2018, 8–10) Из 34 одинаковых стержней длиной  $a$  и массой  $m$  изготовлены макеты двух чисел 238 и 328 (каждое «звено» каждой цифры — один стержень). Макеты чисел расположили на коромысле равноплечих весов длиной  $20a$  так, как это показано на рисунке. Какое из чисел перевесит и почему? Какой дополнительный груз нужно расположить на другом конце коромысла весов, чтобы восстановить равновесие?



$$m = 328; m_x = 238$$

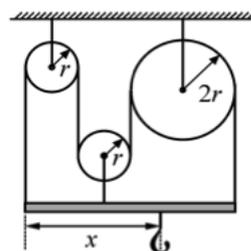
ЗАДАЧА 10. (Всеросс., 2018, ШЭ, 9) Система, состоящая из двух однородных стержней разной плотности, находится в равновесии. Масса верхнего стержня  $m_1 = 3,6$  кг. Трение пренебрежимо мало. Определите, при какой массе  $m_2$  нижнего стержня возможно такое равновесие.

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow m_1 g \frac{L}{2} = m_2 g \frac{L}{2} \Rightarrow m_2 = m_1 = 3,6 \text{ кг}$$



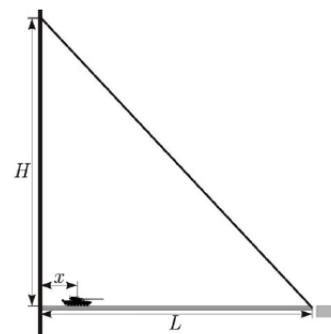
ЗАДАЧА 11. (Всеросс., 2015, МЭ, 8–10) В системе, изображённой на рисунке, блоки, нить и стержень невесомы. Правый блок в два раза больше по размеру, чем другие два. Участки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны. На крючок повесили груз некоторой массы, при этом система осталась неподвижна. Определите, чему равно отношение  $x/r$ .

$$\frac{x}{r} = 2$$



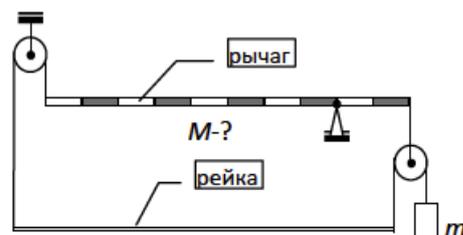
ЗАДАЧА 12. (Всеросс., 2016, МЭ, 9) Танк массой  $m = 50$  т выезжает по откидному мосту из замка (см. рисунок). Мост представляет собой однородную балку длиной  $L = 60$  м и массой  $M = 60$  т. Правый конец моста удерживается в горизонтальном положении двумя наклонными тросами так, как показано на рисунке. Расстояние от моста до верхней точки крепления тросов  $H = 80$  м. Постройте график зависимости модуля силы натяжения  $T$  одного троса от положения  $x$  танка на мосту.

См. конец листа



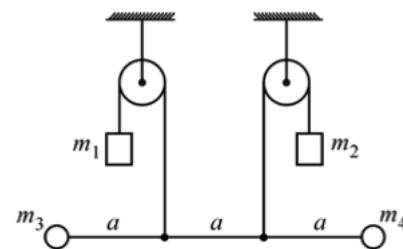
ЗАДАЧА 13. (Всеросс., 2017, МЭ, 9) Система состоит из однородного рычага, однородной рейки и груза массой  $m = 0,6$  кг, соединённых лёгкими нитями, переброшенными через невесомые блоки. При какой массе  $M$  рычага возможно равновесие системы? Трения в системе нет. Участки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны.

$$M = 2,4 \text{ кг}$$



ЗАДАЧА 14. (МОШ, 2013, 9) На рисунке изображён легкий горизонтальный жёсткий стержень длиной  $3a$ , к которому на расстояниях  $a$  и  $2a$  от одного из концов прикреплены вертикальные нити, перекинутые через блоки. К противоположным концам нитей прикреплены грузы массами  $m_1$  и  $m_2$ . К концам стержня прикреплены грузы массами  $m_3$  и  $m_4$ . Известно, что  $m_1 = 1$  кг и  $m_3 = 2$  кг. Какими должны быть массы  $m_2$  и  $m_4$ , чтобы система находилась в равновесии?

$$m_2 = 1 \text{ кг}, m_4 = 2 \text{ кг}$$



ЗАДАЧА 15. (*Всеросс., 2014, МЭ, 8–9*) Школьник Станислав проводит опыт с однородным цилиндром массой  $M = 1$  кг и длиной  $L = 1$  м. Прикрепив при помощи тонких лёгких нитей к одному концу цилиндра гирию массой  $M = 1$  кг, а к другому — груз массой  $3M = 3$  кг, Станислав уравнивает цилиндр на пальце. На каком расстоянии от гири должен находиться палец?

70 02

ЗАДАЧА 16. (*МОШ, 2014, 8–9*) Однородная доска массой 3 кг и длиной 2 м опирается левым концом на одну пружину, а правым концом — на две такие же пружины. Школьница Ирина хочет разместить на доске маленький груз массой  $m$  таким образом, чтобы доска была горизонтальна.

А) На каком расстоянии от левого конца доски Ирина должна разместить груз массой  $m = 6$  кг? Ответ представьте в сантиметрах и округлите до целых.

В) При каком минимальном  $m$  Ирина сможет добиться горизонтальности доски? Ответ представьте в килограммах и округлите до десятых.

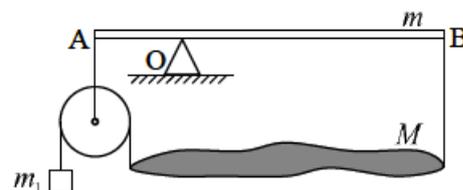
(А) 150; (В) 1,5

ЗАДАЧА 17. (*«Росатом», 2012, 11*) Стержень массой  $m$  и длиной  $l$  удерживают в горизонтальном положении с помощью двух точечных опор, расположенных на расстоянии  $l/5$  друг от друга. Найти силы реакции опор, считая, что на одну из них стержень опирается самым краем.



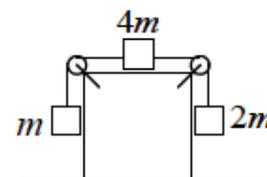
$$6m\frac{g}{5} = r_N \quad ; \quad 6m\frac{g}{5} = r_N$$

ЗАДАЧА 18. (*«Росатом», 2018, 11*) Рычаг АВ массой  $m$  находится в равновесии на точечной опоре О. Плечи рычага относятся как  $AO : OB = 1 : 2$ . К концам рычага с помощью невесомых нитей прикреплены невесомый блок и неоднородное тело массой  $M$ . Ко второму концу тела прикреплена нить с грузом, переброшенная через блок. Найти массу груза  $m_1$ .



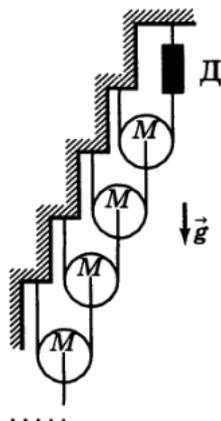
$$\frac{8}{m+M\sqrt{2}} = r_u$$

ЗАДАЧА 19. (*«Росатом», 2017, 9–10*) На горизонтальной опоре находится куб, на котором укреплены два блока. Через блоки перекинута нить с грузами массами  $m$ ,  $4m$  и  $2m$ . Какой горизонтальной силой надо действовать на куб, чтобы он покоился? Трение между кубом и опорой отсутствует; коэффициент трения между верхним телом и кубом —  $k$ .



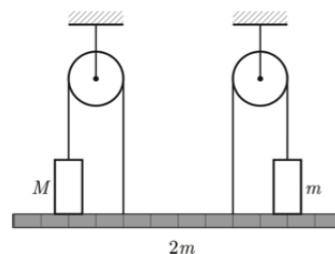
$$F = \begin{cases} 0, & \text{если } k < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}mg(1-k), & \text{если } k \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ЗАДАЧА 20. (Всеросс., 1999, ОЭ, 9) Из лёгких нитей и одинаковых блоков массой  $M$  каждый собрана полубесконечная система (рис.). Найдите силу  $F$ , которую показывает динамометр  $Д$ .



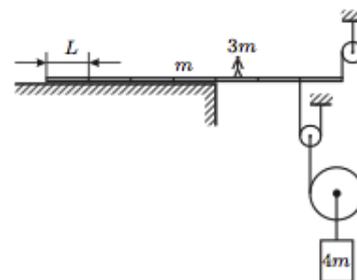
$$6M = F$$

ЗАДАЧА 21. (Всеросс., 2015, РЭ, 9) В системе (см. рисунок) найдите величины сил, с которыми грузы действуют на однородную планку. При каких значениях массы  $M$  возможно равновесие грузов на планке? Нити и блоки невесомы. Трения нет. Масса  $m$  известна.



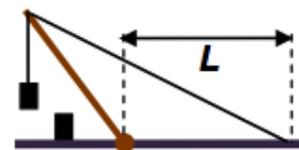
$$M > m \text{ и } M \geq m \text{ при равновесии возможны}$$

ЗАДАЧА 22. (Всеросс., 2014, РЭ, 9) Доска массой  $m$  лежит, выступая на  $3/7$  своей длины, на краю обрыва. Длина одной седьмой части доски  $L = 1$  м. К свисающему краю доски с помощью невесомых блоков и нитей (см. рисунок) прикреплен противовес, имеющий массу  $4m$ . На каком расстоянии от края обрыва на доске может стоять человек массой  $3m$ , чтобы доска оставалась горизонтальной?



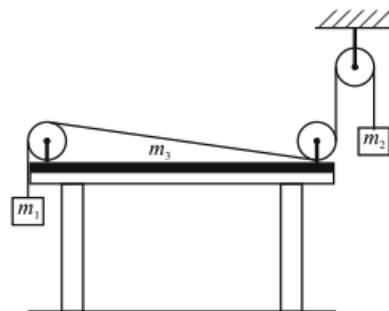
$$\text{Не более } 2,5 \text{ м влево и не более } 1,5 \text{ м правее от края обрыва}$$

ЗАДАЧА 23. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 7–9) Тонкий жесткий стержень длины  $L$  шарнирно закреплен на горизонтальной поверхности (он может свободно вращаться в вертикальной плоскости). Его конец с помощью легкого нерастяжимого троса прикреплен к поверхности в точке, которая удалена от шарнира на расстояние, равное длине стержня (см. рисунок). Длина троса в  $\sqrt{3}$  раза больше длины стержня. Когда к концу стержня подвесили небольшой груз, то сила натяжения нити оказалась равна 21 Н. После подвешивания к первому грузу второго (точно такого же) эта сила возросла до 26 Н. Найдите массу стержня и каждого из грузов. Ускорение свободного падения  $g \approx 10 \text{ м/с}^2$ .



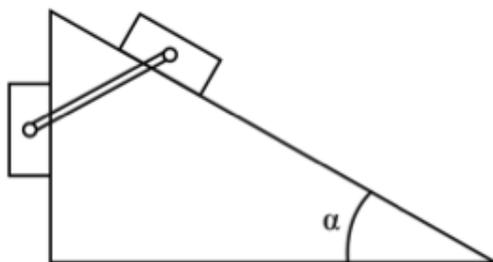
$$M = 21 \text{ Н}$$

Задача 24. (МОШ, 2006, 9) В системе, изображённой на рисунке, нить невесома и нерастяжима, блоки невесомы, трения нет. Массы грузов на концах нити равны  $m_1$  и  $m_2$ , однородная доска массой  $m_3$  лежит на горизонтальном столе так, что вертикальные участки нити, переброшенной через закреплённые на доске блоки, проходят вдоль её торцов. При каком условии доска при движении грузов будет оставаться в горизонтальном положении?



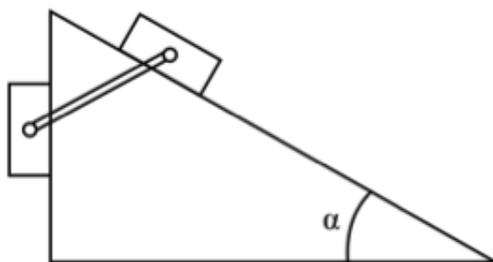
$$\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \leq \epsilon m$$

Задача 25. («Курчатов», 2019, 9) На наклонной плоскости покоятся два груза, соединенные стержнем. Найдите угол между стержнем и горизонтом, если  $\alpha = 30^\circ$ , а масса правого груза вдвое больше левого.



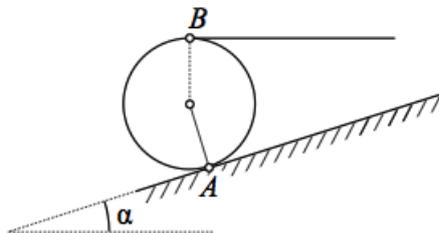
00E

Задача 26. («Курчатов», 2019, 10) На наклонной плоскости покоятся два груза, соединенные стержнем. Найдите угол между стержнем и горизонтом, если  $\alpha = 30^\circ$ , а масса правого груза втрое больше левого.



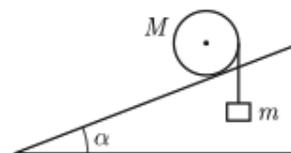
$\frac{4}{3} \sqrt{3} g \sin \alpha$

Задача 27. (МОШ, 2019, 11) Однородный шар радиусом  $R$  и массой  $m$  удерживается на наклонной плоскости горизонтальной нитью, прикреплённой к нему в точке  $B$ . Найти натяжение нити  $T$  и коэффициент трения  $\mu$  в точке  $A$ , если угол наклона плоскости к горизонту равен  $\alpha$ .



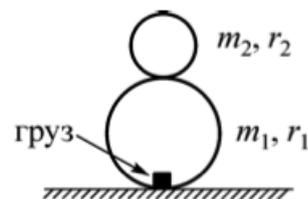
$$\frac{2}{3} \sin \alpha \mu = \mathcal{L}$$

Задача 28. (МОШ, 2006, 9) Цилиндр массой  $M$  поместили на рельсы, наклонённые под углом  $\alpha$  к горизонту (вид сбоку показан на рисунке). Груз какой минимальной массы  $m$  нужно прикрепить к намотанной на цилиндр нити, чтобы он покатился вверх? Проскальзывание отсутствует.



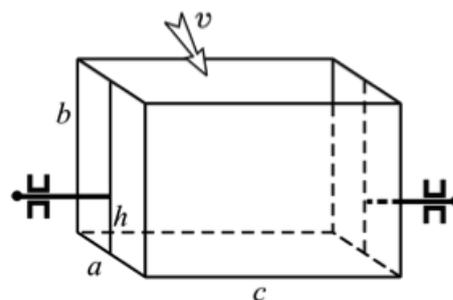
$$\frac{2 \sin \alpha - 1}{\sin \alpha} M = m$$

Задача 29. (МОШ, 2012, 9) Детская игрушка «неваляшка» состоит из двух пластмассовых шаров радиусами  $r_1 = 9$  см и  $r_2 = 6$  см (см. рисунок), полых внутри. Игрушка стоит на горизонтальном столе. В нижней точке нижнего шара закреплён маленький груз массой  $M = 250$  г. «Неваляшка» обладает следующим свойством: если её положить набок так, чтобы оба шара касались стола, и отпустить, то она «встанет» и вновь примет вертикальное положение. При каких массах  $m_1$  и  $m_2$  нижнего и верхнего шаров соответственно игрушка обладает этим свойством? Считать, что центры масс шаров совпадают с их геометрическими центрами.



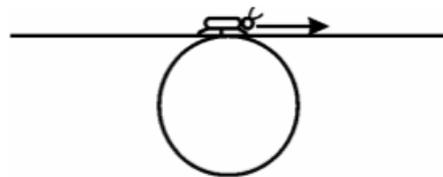
$$\text{всегда} - \text{никогда} = \frac{m_2 + r_1}{r_1} > \frac{m_1}{r_2}$$

Задача 30. (МОШ, 2010, 9) Лёгкая тонкостенная чаша в виде прямоугольного параллелепипеда с длинами рёбер  $a$ ,  $b$  и  $c$  свободно подвешена на горизонтальной оси так, что нижняя грань чаши с размерами  $a \times c$  горизонтальна, а верхняя открыта (то есть отсутствует — см. рисунок). Ось проходит перпендикулярно граням параллелепипеда с размерами  $a \times b$  в плоскости их симметрии на расстоянии  $h < b/2$  от нижней грани  $a \times c$ . Чаша начинает наполняться водой со скоростью  $v$  м<sup>3</sup>/с. Через какое время чаша опрокинется, повернувшись вокруг оси? Что с ней будет происходить в дальнейшем, если скорость наполнения не меняется?



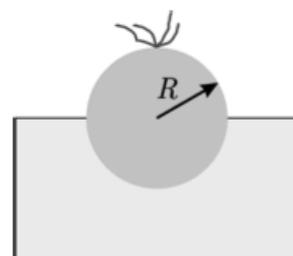
$$\mathcal{L} \text{ опрокинется с вращением} ; \frac{a}{2ch} = \mathcal{L}$$

Задача 31. (МОШ, 2007, 9) На неподвижно закреплённом цилиндре радиусом  $R$  лежит тонкая линейка длиной  $l = 2\pi R$  и массой  $M$ . Линейка расположена горизонтально, перпендикулярно к оси цилиндра и опирается на него своей серединой. На середине линейки сидит жук массой  $0,2M$ , который начинает медленно ползти к одному из концов линейки, прочно цепляясь за её шероховатости; линейка при этом меняет угол своего наклона к горизонту, перекатываясь по цилиндру без проскальзывания. На каком расстоянии  $x_0$  от середины линейки будет расположена точка соприкосновения линейки и цилиндра, когда жук доползет до конца линейки? Под каким углом  $\alpha_0$  к горизонту будет при этом наклонена линейка? При каких значениях коэффициента трения  $\mu$  между цилиндром и линейкой возможно такое её перекатывание без проскальзывания?



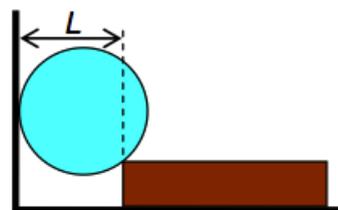
$$\frac{\mu}{l} < \mu \leq \frac{9}{8} = 1,125$$

Задача 32. (МОШ, 2018, 9) Дед, бабка, внучка, Жучка, Мурка и мышка-норушка хотят вытянуть репку. Репка является однородным шаром радиусом  $R$ , на вершине которого расположены многочисленные прочные невесомые длинные листья, за которые репку можно вытягивать. Репка погружена в землю наполовину. Известно, что дед может тянуть с максимальной силой  $F$ , бабка — тянуть вдвое слабее, внучка — вдвое слабее бабки, Жучка — вдвое слабее внучки, Мурка — вдвое слабее Жучки, а мышка-норушка — вдвое слабее Мурки. Какова максимально возможная масса репки, если известно, что её удалось вытянуть? Как должны были герои сказки тянуть такую репку для того, чтобы всё же вытянуть её? Считайте, что репка уже созрела, её корешки отсохли, и она держится в плотно слежавшейся земле только благодаря собственному весу. При вытягивании репка не может вращаться вокруг своей оси симметрии.



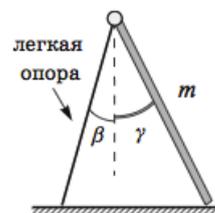
$$\frac{6}{F} \frac{32}{2} = m$$

Задача 33. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 7–9) Гладкий шар массой  $m = 0,5$  кг радиусом  $R = 5$  см положили так, что он опирается на вертикальную стенку и длинный брусок массой  $M = 2$  кг (см. рисунок). Брусок находится на расстоянии  $L = 8$  см от стенки и лежит на горизонтальной шероховатой поверхности. При какой минимальной величине коэффициента трения между бруском и поверхностью такое равновесие возможно?



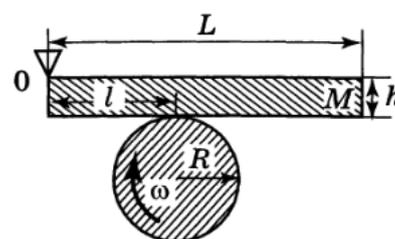
$$\mu_{\min} = \frac{3m}{4(m+M)} = 0,15$$

ЗАДАЧА 34. (Всеросс., 2019, финал, 9) На рисунке изображена упрощённая модель лестницы-стремянки, состоящей из соединённых шарнирно легкой опоры и массивной части, наклоненных под углами  $\beta = 20^\circ$  и  $\gamma$  к вертикали ( $\text{tg } \gamma = 2 \text{tg } \beta$ ). Масса лестницы  $m = 20$  кг. Определите, с какой силой взаимодействуют между собой части лестницы. Трения в шарнире нет. Коэффициент трения между полом и касающимися его частями стремянки одинаков. При каком минимальном значении коэффициента  $\mu$  части лестницы не будут разъезжаться? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



$$g \sin \alpha = g \sin \beta = 0 \text{ m/s}^2; \text{H} \text{ T} L = \frac{g \sin \alpha}{\sin \beta} = \text{A}$$

ЗАДАЧА 35. (Всеросс., 2000, финал, 9) К диску радиуса  $R$ , насаженному на горизонтальный вал двигателя, под действием силы тяжести прижимается тяжёлый брусок массой  $M$ . Брусок может свободно поворачиваться относительно оси  $O$  (рис.). Длина бруска равна  $L$ , его толщина  $h$ . Точка соприкосновения бруска с диском находится на расстоянии  $l$  от левого края бруска. Коэффициент трения скольжения между бруском и диском равен  $\mu$ . Предполагая, что двигатель развивает мощность  $P$ , определите угловую скорость  $\omega$  вращения диска в зависимости от расстояния  $l$ . Рассмотрите случаи вращения диска по ( $\omega^+$ ) и против ( $\omega^-$ ) часовой стрелки. Постройте графики  $\omega^+(l)$  и  $\omega^-(l)$ .



$$\text{(линии) } \mu l < l \text{ или } (\mu l - l) \frac{M g h}{R} = (l)_{-} \omega; \text{ или } (\mu l + l) \frac{M g h}{R} = (l)_{+} \omega$$

ЗАДАЧА 36. (Межреспубл., 1992, финал, 9) Тяжёлая цепочка, состоящая из большого числа одинаковых гладких звеньев, свободно подвешена за концы (рис.). Масса всей цепочки  $m = 0,2$  кг. Определите силы натяжения в нижней точке цепочки, а также в точке  $A$ , лежащей на половине глубины «провиса» цепочки.

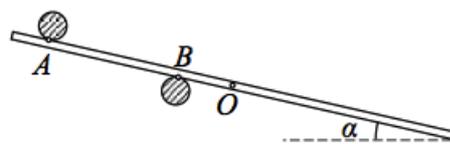


$$\text{H} \text{ T} L \approx \frac{V \sin \alpha}{L} = V L; \text{H} \text{ T} L \approx \frac{V \sin \alpha}{L} = 0 L$$

ЗАДАЧА 37. (Всеросс., 2015, ШЭ, 10) Однородная прямая металлическая балка массой  $M = 100$  кг и длиной  $L = 3$  м установлена под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту. Нижний конец балки упирается в землю. Какую минимальную силу  $F$  нужно прикладывать к балке, чтобы удерживать её в таком положении? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

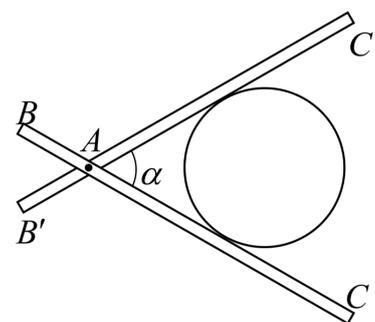
$$\text{H} \text{ T} L = \frac{V \sin \alpha}{L} = 0 L$$

ЗАДАЧА 38. (МОШ, 2018, 11) Стержень лежит на двух горизонтальных валиках, касаясь их в точках  $A$  и  $B$ . Известны длина отрезка  $AB = a$  и расстояние  $b$  между точкой  $A$  и центром тяжести прута  $O$ . Найдите коэффициент трения  $\mu$  между валиком  $B$  и стержнем, если валик  $A$  гладкий, а прут образует с горизонтом угол  $\alpha$ .



$$\mu \geq \frac{a}{b} \tan \alpha$$

ЗАДАЧА 39. («Росатом», 2020, 9–10) На горизонтальной поверхности между двумя одинаковыми стержнями  $BC$  и  $B'C'$  находится шайба (см. рисунок; вид сверху). Стержни скреплены шарнирно в точке  $A$ . Концы стержней  $B$  и  $B'$  сжимают, перемещая шайбу по поверхности. При каком угле между стержнями  $\alpha$  наступит заклинивание — шайба перестанет двигаться при любом усилии, прикладываемом к точкам  $B$  и  $B'$ ? Коэффициент трения между стержнями и шайбой —  $\mu$ , трение между шайбой и поверхностью отсутствует.



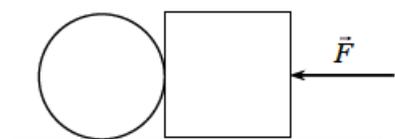
$$\alpha \geq \arctan \mu$$

ЗАДАЧА 40. («Росатом», 2016, 10) Две пластинки массой  $M$  и длиной  $l$  прикреплены шарнирно по одной из своих сторон к потолку. Шар радиуса  $R = l/6$  вставлен между пластинками так, что расстояние от точек касания шара и пластинок до шарнира равно  $l/2$ . Коэффициент трения между шаром и пластинками  $k$ . Какой должна быть масса шара, чтобы он находился в равновесии? При каком максимальном коэффициенте трения между шаром и пластинками пластинки не смогут удержать шар при любой его массе?



$$k \geq \frac{1}{2} \left( \frac{M}{m} - 1 \right) \Rightarrow m \geq \frac{M}{2k + 1}$$

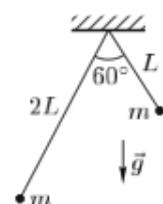
ЗАДАЧА 41. («Росатом», 2017, 11) На шероховатой горизонтальной поверхности находятся цилиндр массой  $m$  и куб массой  $2m$ . Диаметр основания цилиндра равен стороне куба. Какой минимальной горизонтальной силой, проходящей через центры тел, нужно действовать на куб, чтобы при движении тел цилиндр не вращался? Коэффициенты трения между кубом и поверхностью, цилиндром и поверхностью, а также между цилиндром и кубом одинаковы и равны  $\mu$ .



$$F \geq \mu(m + 2m) = 3\mu m$$

ЗАДАЧА 42. (Всеросс., 2010, РЭ, 10) Определите модуль силы электростатического отталкивания двух маленьких заряженных шариков одинаковой массы  $m$ . Один из них висит на нити длины  $L$ , другой — на нити длины  $2L$ . Угол между нитями равен  $60^\circ$  (см. рисунок).

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$$

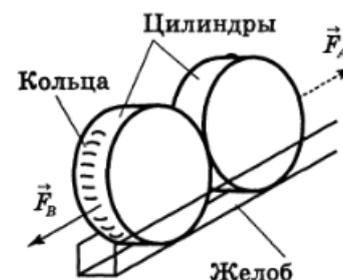


ЗАДАЧА 43. («Росатом», 2019, 11) Два однородных стержня длиной  $3l$  и  $4l$  и массой  $m$  и  $3m$  соответственно сварены концами под прямым углом друг к другу. Сделанный таким образом «прямой угол» повешен на двух нитях одинаковой длины, которые в равновесии занимают вертикальное положение (см. рисунок). Найти отношение сил натяжения левой и правой нитей.



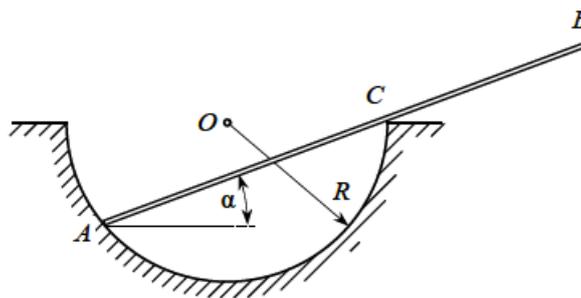
$$\frac{111}{68} = \frac{d_{11}L}{\frac{3}{4}L}$$

ЗАДАЧА 44. (Всеросс., 2000, ОЭ, 10) Система из двух жёстко соединённых цилиндров радиуса  $R$  и массой  $m = 200$  г каждый находится в горизонтальном желобе с гладкими стенками (рис.). Коэффициент трения правого цилиндра о поверхность  $\mu_1 = 0,3$ , а левого —  $\mu_2 = 0,1$ . Цилиндры можно тащить за нить, прикрепляемую к одному из колец на их внешней стороне. В какую сторону легче сдвинуть эту систему, прикладывая горизонтальную силу к нити, направленной вдоль линии, соединяющей центры цилиндров? Найдите минимальные горизонтальные силы  $F_A$  и  $F_B$ , необходимые для того, чтобы сдвинуть систему вправо и влево соответственно. Можно ли эту систему сдвинуть влево или вправо, потянув её за нить в горизонтальном направлении с силой  $T = 0,7$  Н? Ответ обоснуйте.



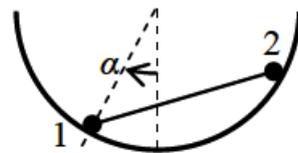
$$\text{онжком} \Leftarrow \text{H } 29,0 \approx \frac{27-17+1}{68(27+17)} = \text{F}_{\text{min}}; \text{H } 27,0 \approx \frac{27-17+2}{68(27+17)} = \text{F}_B; \text{H } 68,0 \approx \frac{27+17-2}{68(27+17)} = \text{F}_A$$

ЗАДАЧА 45. (МОШ, 2017, 10) В горизонтальной плоской плите сделано углубление в виде полусферы радиусом  $R$ . В углубление опущен однородный тонкий стержень  $AB$  неизвестной длины  $l$  ( $2R < l < 4R$ ). Найдите длину стержня, если он образует с горизонтом угол  $\alpha$ . Трения нигде нет.



$$l = 4R \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha}$$

ЗАДАЧА 46. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) «Гантель» из лёгкого жёсткого стержня и двух массивных маленьких шариков одинакового радиуса положили в гладкую полусферическую «ямку». Длина стержня в  $\sqrt{2}$  раз больше радиуса ямки. Оказалось, что гантель находится в равновесии, если радиус, проведённый к первому шарiku, составляет угол  $\alpha = 30^\circ$  с вертикалью. Найти отношение масс шариков.

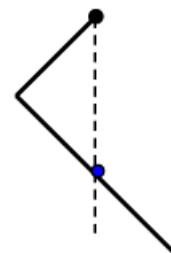


$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ЗАДАЧА 47. (МОШ, 2012, 10) Гладкая полусферическая чаша неподвижно закреплена на столе так, что её ось симметрии вертикальна. В чашу последовательно кладут два тонких неоднородных стержня одинаковой массы и одинаковой длины, меньшей диаметра чаши. Первый стержень в положении равновесия образует с горизонтом угол  $\alpha_1$ , а второй — угол  $\alpha_2 < \alpha_1$ . Затем стержни скрепляют друг с другом боковыми поверхностями так, что они образуют новый тонкий стержень прежней длины, и кладут получившийся составной стержень обратно в чашу. Какой угол с горизонтом будет образовывать в положении равновесия этот составной стержень?

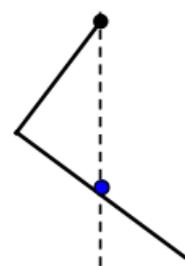
$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

ЗАДАЧА 48. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) «Уголок» массой  $m = 60$  г, изготовленный из однородной проволоки, имеет два перпендикулярных «плеча» с длинами  $l_1 = a = 20$  см и  $l_2 = 2a$ . Он повешен за конец короткого плеча на шарнирном подвесе (который позволяет ему свободно вращаться в вертикальной плоскости) и опирается серединой длинного плеча на гладкий горизонтальный гвоздь, расположенный на одной вертикали с подвесом (см. рисунок). Найти величину силы, с которой уголок действует на подвес. Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



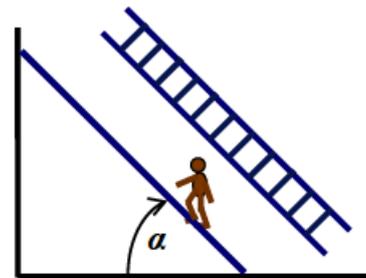
$$F = \frac{3}{2} mg \approx 0.65 \text{ Н}$$

ЗАДАЧА 49. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11) Уголок, изготовленный из однородной проволоки, имеет два перпендикулярных «плеча» с длинами  $l_1 \equiv a = 20$  см и  $l_2 = \frac{3}{2}a = 30$  см. Его повесили за конец короткого плеча на шарнирном подвесе (который позволяет ему свободно вращаться в вертикальной плоскости вдоль стенки, не касаясь ее). Затем в стену на одной вертикали с подвесом вбили горизонтально гладкий гвоздь — так, что теперь уголок опирается на гвоздь серединой длинного плеча. Во сколько раз и как изменилась из-за появления гвоздя величина силы, с которой уголок действует на подвес?



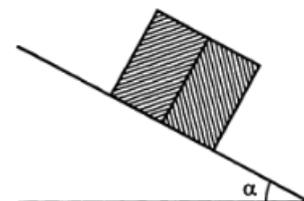
$$\frac{F_2}{F_1} \approx 1.13 \text{ раза}$$

ЗАДАЧА 50. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) У лестницы 11 одинаковых ступеней, распределённых равномерно: расстояние от нижнего конца до нижней ступени, расстояния между соседними ступенями и расстояние от верхней ступени до верхнего конца одинаковы. Её поставили в угол, образованный стеной и полом. Коэффициент трения между стеной и лестницей  $\mu = 0,25$ , а коэффициент трения между лестницей и полом  $2\mu = 0,5$ . Человек с массой, равной удвоенной массе лестницы, поднимается по ступеням. Когда он перенёс весь свой вес на девятую ступень, лестница, немного постояв, начала скользить. Чему равнялся угол между лестницей и полом?



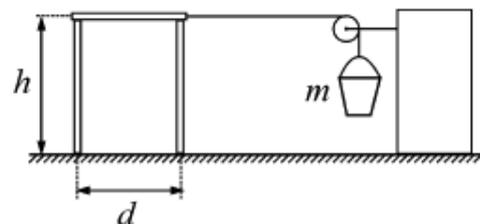
$$\frac{1}{5} \operatorname{arctg} \alpha = \frac{11g}{2\mu - 1} \operatorname{arctg} \alpha = \alpha$$

ЗАДАЧА 51. (Всеросс., 1996, ОЭ, 10) Куб, склеенный из двух одинаковых по объёму частей, кладут на наклонную плоскость таким образом, что плоскость склейки, параллельная одной из граней куба, перпендикулярна наклонной плоскости (рис.). Начнёт ли двигаться куб? Если да, то каким будет его движение в начальный момент? Отношение плотности материалов, из которых сделан куб, равно 20. Угол наклона плоскости  $\alpha = 30^\circ$ , коэффициент трения между наклонной плоскостью и нижней гранью куба  $\mu = 0,8$ .



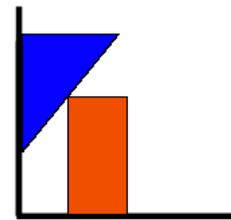
Плоской или опрокидывание

ЗАДАЧА 52. (МОШ, 2016, 10) На горизонтальном полу стоит табуретка массой  $M = 4,5$  кг. Высота табуретки  $h = 45$  см, а расстояние между её ножками  $d = 30$  см. Коэффициент трения между ножками и полом  $\mu = 0,4$ . Экспериментатор Глюк привязал к середине стороны сиденья табуретки невесомую нерастяжимую нить, перекинутую через блок (см. рисунок). На втором конце нити висит ведро с водой. Масса ведёрка вместе с водой равна  $m = 0,6$  кг. Экспериментатор Глюк опустил в ведро тонкую трубку с внутренним диаметром  $D = 4$  мм, по которой в ведро стала доливаться вода с постоянной скоростью  $v = 0,2$  м/с. Плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, ускорение свободного падения можно считать равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Через какое время после этого табуретка придёт в движение? Как начнёт двигаться табуретка: скользить, двигаясь поступательно, или опрокидываться, поворачиваясь вокруг некоторой оси?



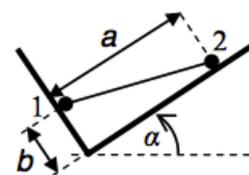
$$\text{Начнёт опрокидываться через } \tau = \frac{2M \mu d}{4} \left( m - \frac{4g}{\rho} \right) \approx 3,8 \text{ с}$$

ЗАДАЧА 53. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Клин с углом  $\alpha$  при вершине может скользить без трения по вертикальным направляющим и опирается на брусок, стоящий на горизонтальной поверхности. Масса бруска в  $n = 2$  раза больше массы клина, высота бруска во столько же раз больше его ширины, коэффициент трения между бруском и поверхностью  $\mu = 2/3$ . При каких  $\alpha$  брусок может покоиться?



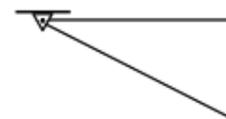
$$\arctan \frac{2+n}{n} \leq \alpha < 45^\circ$$

ЗАДАЧА 54. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) «Гантель» из лёгкого жёсткого стержня и двух массивных маленьких шариков одинакового радиуса положили в гладкую яму в виде прямого двугранного угла, одна из плоскостей которого составляет угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом. Оказалось, что гантель находится в равновесии, если отношение расстояний от шариков до вершины угла  $a/b = 3$ . Найти отношение масс шариков.



$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a}{b} \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{3}{\sin 30^\circ}$$

ЗАДАЧА 55. («Росатом», 2012, 2018, 11) Вырезанный из листа фанеры прямоугольный треугольник массой  $m$  подвешен за одну вершину и удерживается так, что один из его катетов параллелен поверхности земли. Какую минимальную силу нужно приложить для этого к треугольнику? Горизонтальный катет вдвое длиннее вертикального.



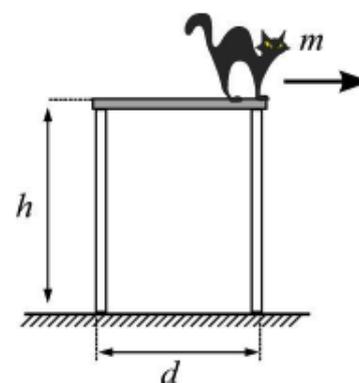
$$\frac{F}{mg} = \frac{1}{2}$$

ЗАДАЧА 56. («Росатом», 2012, 11) Человек медленно поднимает за один конец лежащий на полу стержень, прикладывая к нему силу, перпендикулярную стержню (см. рисунок). При каком минимальном коэффициенте трения между стержнем и полом человек сможет поставить стержень вертикально?



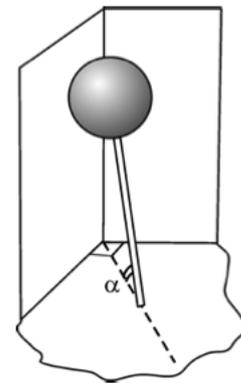
$$\frac{\mu}{L} = \frac{1}{2}$$

ЗАДАЧА 57. (МОШ, 2016, 11) На краю табуретки массой  $M = 4,5$  кг сидит кошка массой  $m = 1,5$  кг. Высота табуретки  $h = 45$  см, а расстояние между ножками  $d = 30$  см (см. рисунок). Коэффициент трения между ножками и полом равен  $\mu = 0,5$ . Кошка прыгает с табуретки в направлении, показанном стрелкой. При этом ускорение центра масс кошки направлено горизонтально. При каком максимальном значении модуля этого ускорения табуретка будет оставаться неподвижной? Если модуль ускорения превысит это значение на очень малую величину, то как начнёт двигаться табуретка: скользить по полу или опрокидываться, поворачиваясь вокруг некоторой оси? Ускорение свободного падения можно считать равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



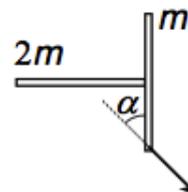
$$a_{\max} = \frac{g}{\mu} \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \frac{d}{2h} = 10 \frac{0,5}{1} \left( 1 + \frac{1,5}{4,5} \right) \frac{30}{2 \cdot 45} = 10 \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \text{ м/с}^2$$

ЗАДАЧА 58. (МОШ, 2012, 11) «Чупа-чупс стоял в углу...» За что его поставили, неясно, но стоять ему не очень-то хотелось. Вот он и стал постепенно отставлять свою «ножку» всё дальше вдоль биссектрисы того прямого угла между стенками, в который его поставили, а «головой» опираясь о стенки (см. рисунок). При каком угле  $\alpha$  между ножкой и полом чупа-чупс упадёт? Считать, что вся его масса сосредоточена в однородной шарообразной «голове» радиусом  $R$ , расстояние от центра головы до конца ножки равно  $l$ , коэффициент трения головы о стенки угла —  $\mu_1$ , а ножки об пол —  $\mu_2$ . Решите задачу в общем виде, а затем проведите численный расчёт угла  $\alpha$  для случая  $\mu_1 = \mu_2 = 0,6$ ,  $l = 4R$ .



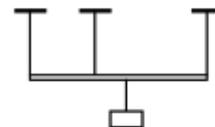
$$\frac{\mu_1 + \mu_2}{1} \approx \frac{\mu_1 + \mu_2}{1} \cos \alpha - \frac{\mu_1 + \mu_2}{1} \sin \alpha = 0$$

ЗАДАЧА 59. («Росатом», 2011 и 2013, 11) Две тонкие палочки одинаковой длины с массами  $m$  и  $2m$  образуют букву «Т» (палочка с массой  $2m$  прикреплена к середине палочки с массой  $m$  под прямым углом к ней). Палочки лежат на шероховатой горизонтальной поверхности (см. рисунок, вид сверху). К одному из концов палочки  $m$  привязана нить, за которую систему палочек медленно тянут по поверхности. Какой угол  $\alpha$  составляет палочка  $m$  с нитью?



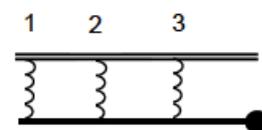
$$\frac{\mu}{\tau} \sin \alpha = 0$$

ЗАДАЧА 60. («Росатом», 2012, 11) Невесомый недеформируемый стержень длиной  $l$  подвешен на трёх одинаковых вертикальных нитях, привязанных к концам и точке, лежащей на расстоянии  $l/3$  от его левого конца (см. рисунок). На каком максимальном расстоянии справа от точки крепления средней нити можно подвесить массивное тело так, чтобы все нити были натянутыми? Считать, что нити упругие, но слабо растяжимые.



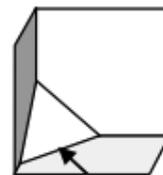
$$\frac{x}{l} < x$$

ЗАДАЧА 61. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) На конце лёгкого стержня, прикрепленного с помощью трёх одинаковых вертикальных невесомых пружин к горизонтальному потолку, находится груз массой  $m$ . Расстояние между пружинами и от крайней пружины до груза одинаковы (см. рисунок). Деформации пружин очень малы по сравнению с их длиной, а деформации стержня и потолка много меньше деформаций пружин. Найти силы упругости пружин. Ускорение свободного падения  $g$ .



$$F_1 = -\frac{3}{2}mg, F_2 = \frac{3}{1}mg, F_3 = \frac{3}{4}mg$$

ЗАДАЧА 62. («Росатом», 2015, 11) Из листа фанеры вырезали равно-  
 сторонний треугольник массой  $m$  и поставили его в угол между тремя  
 взаимно перпендикулярными поверхностями так, что треугольник каса-  
 ется своими сторонами всех трёх граней угла (см. рисунок). Какой мини-  
 мальной горизонтальной силой нужно действовать на середину нижней  
 стороны треугольника, чтобы он покоился?



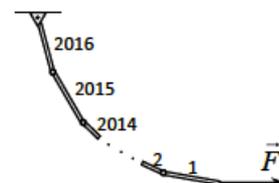
$$\frac{F}{mg} = \frac{1}{2}$$

ЗАДАЧА 63. («Росатом», 2018, 11) На вершину клина, одна грань кото-  
 рого наклонена под углом  $\alpha$ , а вторая перпендикулярна горизонтальной  
 поверхности, кладут маленькое тело массой  $m$  (см. рисунок). Коэффици-  
 ент трения между телом и клином равен  $k$ , трение между клином и по-  
 верхностью таково, что клин не скользит по поверхности. Возможно ли  
 опрокидывание клина? При какой массе клина?



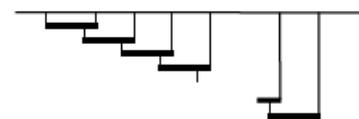
$$M \geq \frac{m}{k \cos \alpha} \text{ или } M \geq \frac{m}{k \sin \alpha}$$

ЗАДАЧА 64. («Росатом», 2016, 11) 2016 одинаковых стержней мас-  
 сой  $m$  каждый соединены шарнирно и подвешены за 2016-ый стержень  
 к потолку. На нижний конец нижнего стержня действует го-  
 ризонтальная сила  $F$ . Найти угол между 2016-м стержнем и верти-  
 калью в равновесии.



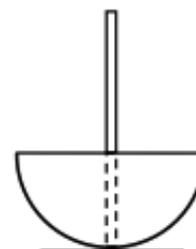
$$\frac{F}{mg} = \frac{1}{2016}$$

ЗАДАЧА 65. («Росатом», 2018, 11) Имеется 2018 одинаковых  
 стержней массой  $m = 1$  кг. Каждый стержень подвешен на двух  
 нитях, прикрепленных к его концам. Левый стержень подвешен  
 к горизонтальному потолку. Все остальные стержни подвешены  
 так, что одна из нитей прикреплена к потолку, вторая — к «преды-  
 дущему» стержню в точке, отстоящей на одну пятую часть его  
 длины от его правого конца (см. рисунок). Найти силу натяжения самой левой нити. Считать,  
 что  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



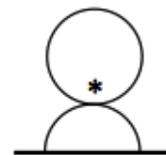
$$F = \frac{m}{g} \approx \left( \frac{1}{5} \right)^{2018} \frac{m}{g} = \frac{1}{5^{2018}} \frac{m}{g}$$

ЗАДАЧА 66. («Росатом», 2013, 11) Тонкостенная полусфера имеет ра-  
 диус  $R$ . К нижней точке внутренней поверхности полусферы припаян  
 очень тонкий стержень, перпендикулярный поверхности полусферы в  
 точке крепления (см. рисунок). Масса стержня в три раза превосходит  
 массу полусферы. При какой длине стержня нарисованное положение  
 тела будет положением устойчивого равновесия? Ответ обосновать.



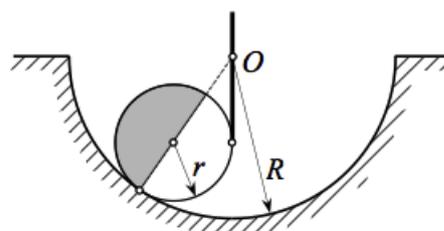
$$\frac{l}{R} > 1$$

ЗАДАЧА 67. («Росатом», 2015, 11) На вершину закреплённой полусферы радиуса  $R$  ставят шар того же радиуса со смещённым центром тяжести («ванька-встанька»). Центр тяжести шара находится ниже его центра на расстоянии  $2R/3$  от центра (см. рисунок; центр тяжести шара показан звездочкой). Будет ли такое положение шара устойчивым? Проскальзывания нет.



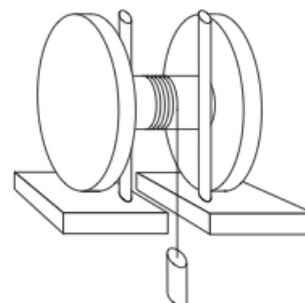
□

ЗАДАЧА 68. (МОШ, 2018, 11) Сферическую оболочку наполовину заполнили воском, и воск застыл. Сферу удерживают вертикальной нитью в неподвижной полусферической лунке, как показано на рисунке. При каких значениях коэффициента трения  $\mu$  сфера с воском будет покоиться? Радиус сферы равен  $r$ , радиус лунки  $R > 2r$ , нить проходит через центр лунки  $O$ .



$$\frac{\mu H \sqrt{2R - r}}{r} \leq \mu$$

ЗАДАЧА 69. (Всеросс., 2002, ОЭ, 11) Катушка массой  $M$  с намотанной на неё лёгкой нитью стоит на горизонтальном столе и упирается в два гвоздя, вбитых вертикально в стол. Один конец нити закреплён на катушке, а к свободному концу нити, свешивающемуся в прорезь стола, привязан груз (рис.). При каких значениях массы  $m$  груза система будет в равновесии? Радиус барабанов катушки  $R$ , радиус намотки нити  $r$ . Коэффициент трения катушки о гвозди  $\mu_1$ , коэффициент трения катушки о поверхность стола  $\mu_2$ .



$$\left. \begin{array}{l} \frac{m}{M} \leq \mu_1 \text{ и } \mu_2, \text{ если } m < M \\ \frac{m}{M} > \mu_1 \text{ и } \mu_2, \text{ если } m > M \frac{r - \mu_1 R}{r + \mu_1 R} \end{array} \right\}$$

Ответ к задаче 12

