

Равномерное движение по окружности

Темы кодификатора ЕГЭ: движение по окружности с постоянной по модулю скоростью, центростремительное ускорение.

Равномерное движение по окружности — это достаточно простой пример движения с вектором ускорения, зависящим от времени.

Пусть точка вращается по окружности радиуса r . Скорость точки постоянна по модулю и равна v . Скорость v называется *линейной скоростью* точки.

Период обращения — это время одного полного оборота. Для периода T имеем очевидную формулу:

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \quad (1)$$

Частота обращения — это величина, обратная периоду:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Частота показывает, сколько полных оборотов точка совершает за секунду. Измеряется частота в об/с (обороты в секунду).

Пусть, например, $T = 0,1$ с. Это означает, что за время 0,1 с точка совершает один полный оборот. Частота при этом получается равна: $\nu = 1/0,1 = 10$ об/с; за секунду точка совершает 10 полных оборотов.

Угловая скорость

Рассмотрим равномерное вращение точки в декартовой системе координат. Поместим начало координат в центре окружности (рис. 1).

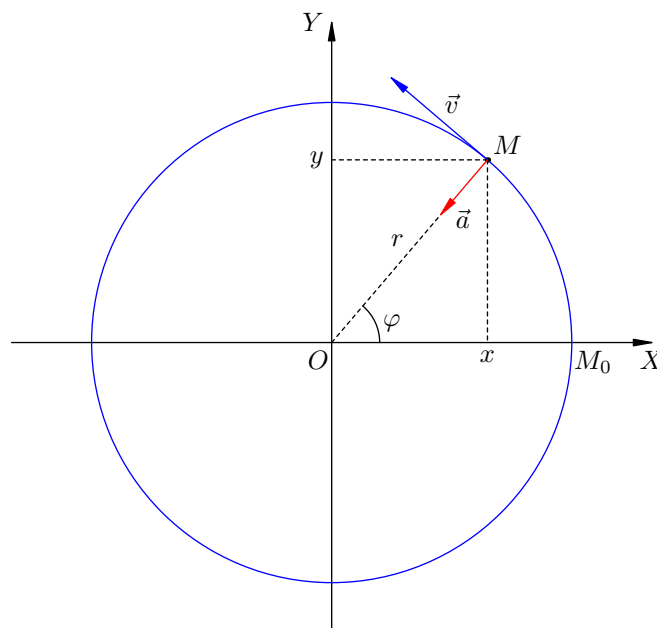


Рис. 1. Равномерное движение по окружности

Пусть M_0 — начальное положение точки; иными словами, при $t = 0$ точка имела координаты $(r, 0)$. Пусть за время t точка повернулась на угол φ и заняла положение M .

Отношение угла поворота ко времени называется *угловой скоростью* вращения точки:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}. \quad (2)$$

Угол φ , как правило, измеряется в радианах, поэтому угловая скорость измеряется в рад/с. За время, равное периоду вращения, точка поворачивается на угол 2π . Поэтому

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (3)$$

Сопоставляя формулы (1) и (3), получаем связь линейной и угловой скоростей:

$$v = \omega r. \quad (4)$$

Закон движения

Найдём теперь зависимость координат вращающейся точки от времени. Видим из рис. 1, что

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Но из формулы (2) имеем: $\varphi = \omega t$. Следовательно,

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t. \quad (5)$$

Формулы (5) являются решением основной задачи механики для равномерного движения точки по окружности.

Центростремительное ускорение

Теперь нас интересует ускорение вращающейся точки. Его можно найти, дважды продифференцировав соотношения (5):

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= -\omega r \sin \omega t, & v_y = \dot{y} &= \omega r \cos \omega t, \\ a_x = \dot{v}_x &= -\omega^2 r \cos \omega t, & a_y = \dot{v}_y &= -\omega^2 r \sin \omega t. \end{aligned}$$

С учётом формул (5) имеем:

$$a_x = -\omega^2 x, \quad a_y = -\omega^2 y. \quad (6)$$

Полученные формулы (6) можно записать в виде одного векторного равенства:

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}, \quad (7)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор вращающейся точки.

Мы видим, что вектор ускорения направлен противоположно радиус-вектору, т. е. к центру окружности (см. рис. 1). Поэтому ускорение точки, равномерно движущейся по окружности, называется *центростремительным*.

Кроме того, из формулы (7) мы получаем выражение для модуля центростремительного ускорения:

$$a = \omega^2 r. \quad (8)$$

Выразим угловую скорость из (4):

$$\omega = \frac{v}{r}$$

и подставим в (8). Получим ещё одну формулу для центростремительного ускорения:

$$a = \frac{v^2}{r}.$$