Релятивистская динамика

Темы кодификатора ЕГЭ: полная энергия, связь массы и энергии, энергия покоя.

В классической динамике мы начали с законов Ньютона, потом перешли к импульсу, а после него — к энергии. Здесь мы ради простоты изложения поступим ровно наоборот: начнём с энергии, затем перейдём к импульсу и закончим релятивистским уравнением движения — модификацией второго закона Ньютона для теории относительности.

Релятивистская энергия

Предположим, что изолированное тело массы m покоится в данной системе отсчёта. Одно из самых впечатляющих достижений теории относительности — это знаменитая *формула Эйнштейна*:

$$E = mc^2. \tag{1}$$

Здесь E — энергия тела, c — скорость света в вакууме. Поскольку тело покоится, энергия E, вычиляемая по формуле (1), называется *энергией покоя*.

Формула (1) утверждает, что каждое тело само по себе обладает энергией — просто потому, что оно существует в природе. Образно говоря, природа затратила определённые усилия на то, чтобы «собрать» данное тело из мельчайших частиц вещества, и мерой этих усилий служит энергия покоя тела. Энергия эта весьма велика; так, в одном килограмме вещества заключена энергия

$$E = 1 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ Дж}.$$

Интересно, какое количество топлива нужно сжечь, чтобы выделилось столько энергии? Возьмём, например, дерево. Его удельная теплота сгорания равна $q = 10^7$ Дж/кг, поэтому находим: $m = E/q = 9 \cdot 10^9$ кг. Это девять миллионов тонн!

Ещё для сравнения: такую энергию единая энергосистема России вырабатывает примерно за десять дней.

Почему столь грандиозная энергия, содержащаяся в теле, до сих пор оставалась нами незамеченной? Почему в нерелятивистских задачах, связанных с сохранением и превращением энергии, мы не учитывали энергию покоя? Скоро мы ответим на этот вопрос.

Поскольку энергия покоя тела прямо пропорциональна его массе, изменение энергии покоя на величину ΔE приводит к изменению массы тела на

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}\,.$$

Так, при нагревании тела возрастает его внутренняя энергия, и, стало быть, масса тела увеличивается! В повседневной жизни мы не замечаем этого эффекта ввиду его чрезвычайной малости. Например, для нагревания воды массой $m = 1$ кг на $\Delta t = 100°$C (удельная теплоёмкость воды равна $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг · °C)) ей нужно передать количество теплоты:

$$Q = c_{\text{в}} m \Delta t = 4{,}2 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Увеличение массы воды будет равно:

$$\Delta m = \frac{Q}{c^2} = \frac{4{,}2 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^{16}} \approx 4{,}7 \cdot 10^{-12} \text{ кг}.$$

Столь ничтожное изменение массы невозможно заметить на фоне погрешностей измерительных приборов.

Формула (1) даёт энергию покоящегося тела. Что изменится, если тело движется?

Снова рассмотрим неподвижную систему отсчёта K и систему K', движущуюся относительно K со скоростью v. Пусть тело массы m покоится в системе K'; тогда энергия тела в системе K' есть энергия покоя, вычисляемая по формуле (1). Оказывается, при переходе в систему K энергия преобразуется так же, как и время — а именно, энергия тела в системе K, в которой тело движется со скоростью v, равна:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{2}$$

Формула (2) была также установлена Эйнштейном. Величина E — это *полная энергия* движущегося тела. Поскольку в данной формуле mc^2 делится на «релятивистский корень», меньший единицы, полная энергия движущегося тела превышает энергию покоя. Полная энергия будет равна энергии покоя только при $v = 0$.

Выражение для полной энергии (2) позволяет сделать важные выводы о возможных скоростях движения объектов в природе.

1. Каждое массивное тело обладает определённой энергией, поэтому необходимо выполнение неравенства
$$1 - \frac{v^2}{c^2} > 0.$$
Оно означает, что $v < c$: *скорость массивного тела всегда меньше скорости света.*

2. В природе существуют безмассовые частицы (например, фотоны), несущие энергию. При подстановке $m = 0$ в формулу (2) её числитель обращается в нуль. Но энергия-то фотона ненулевая!

   Единственный способ избежать здесь противоречия — это принять, что *безмассовая частица обязана двигаться со скоростью света*. Тогда и знаменатель нашей формулы обратится в нуль, так что формула (2) попросту откажет. Нахождение формул для энергии безмассовых частиц не входит в компетенцию теории относительности. Так, выражение для энергии фотона устанавливается в квантовой физике.

Интуитивно чувствуется, что полная энергия (2) состоит из энергии покоя и собственно «энергии движения», т. е. кинетической энергии тела. При малых скоростях движения это показывается явным образом. Используем приближённые формулы, справедливые при $\alpha \ll 1$:

$$\sqrt{1-\alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2}\,, \tag{3}$$

$$\frac{1}{1-\alpha} \approx 1 + \alpha. \tag{4}$$

С помощью этих формул последовательно получаем из (2):

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{mc^2}{1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{c^2}} \approx mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2}\,. \tag{5}$$

Таким образом, при малых скоростях движения полная энергия сводится просто к сумме энергия покоя и кинетической энергии. Это служит мотивировкой для определения понятия кинетической энергии в теории относительности:

$$E_{\text{кин}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - mc^2. \tag{6}$$

При $v \ll c$ формула (6) переходит в нерелятивистское выражение $E_{\text{кин}} = mv^2/2$.

Теперь мы можем ответить на заданный выше вопрос о том, почему до сих пор не учитывалась энергия покоя в нерелятивистских энергетических соотношениях.

Как видно из (5), при малых скоростях движения энергия покоя входит в полную энергию в качестве слагаемого. В задачах, например, механики и термодинамики изменения энергии тел составляют максимум несколько миллионов джоулей; эти изменения столь незначительны по сравнению с энергиями покоя рассматриваемых тел, что приводят к микроскопическим изменениям их масс. Поэтому с высокой точностью можно считать, что суммарная масса тел не меняется в ходе механических или тепловых процессов. В результате суммы энергий покоя тел в начале и в конце процесса попросту сокращаются в обеих частях закона сохранения энергии!

Но такое бывает не всегда. В других физических ситуациях изменения энергии тел могут приводить к более заметным изменениям суммарной массы. Мы увидим, например, что в ядерных реакциях отличия масс исходных и конечных продуктов обычно составляют доли процента. Скажем, при распаде ядра урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ суммарная масса продуктов распада примерно на 0,1% меньше массы исходного ядра. Эта одна тысячная доля массы ядра высвобождается в виде энергии, которая при взрыве атомной бомбы способна уничтожить город.

При неупругом столкновении часть кинетической энергии тел переходит в их внутренюю энергию. Релятивистский закон сохранения полной энергии учитывает этот факт: суммарная масса тел после столкновения увеличивается!

Рассмотрим в качестве примера два тела массы m, летящих навстречу друг другу с одинаковой скоростью $3c/5$. В результате неупругого столкновения образуется тело массы M, скорость которого равна нулю по закону сохранения импульса (об этом законе речь впереди). Согласно закону сохранения энергии получаем:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{(3c/5)^2}{c^2}}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{(3c/5)^2}{c^2}}} = Mc^2,$$

$$2 \cdot \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2}} = Mc^2,$$

$$\frac{2m}{4/5} = M,$$

$$M = \frac{5}{2}m.$$

Мы видим, что, $M > 2m$ — масса образовавшегося тела превышает сумму масс тел до столкновения. Избыток массы, равный $m/2$, возник за счёт перехода кинетической энергии сталкивающихся тел во внутреннюю энергию.

Релятивистский импульс

Классическое выражение для импульса $\vec{p} = m\vec{v}$ не годится в теории относительности — оно, в частности, не согласуется с релятивистским законом сложения скоростей. Давайте убедимся в этом на следующем простом примере.

Пусть система K' движется относительно системы K со скоростью $v = c/2$ (рис. 1). Два тела массы m в системе K' летят навстречу друг другу с одинаковой скоростью $u' = c/2$. Происходит неупругое столкновение.

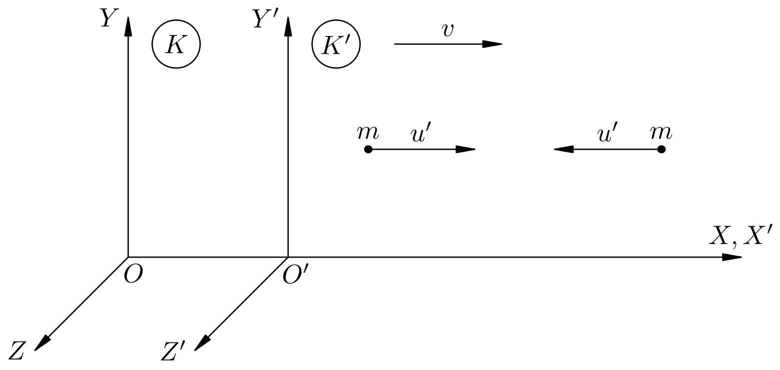

Рис. 1. К закону сохранения импульса

В системе K' тела после столкновения останавливаются. Давайте, как и выше, найдём массу M образовавшегося тела:

$$Mc^2 = 2\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{(c/2)^2}{c^2}}} = \frac{2mc^2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}} = \frac{4mc^2}{\sqrt{3}},$$

откуда

$$M = \frac{4m}{\sqrt{3}}\,.$$

Теперь посмотрим на процесс столкновения с точки зрения системы K. До столкновения левое тело имеет скорость:

$$u_1 = \frac{v+u'}{1+\dfrac{vu'}{c^2}} = \frac{c/2+c/2}{1+\dfrac{(c/2)(c/2)}{c^2}} = \frac{4c}{5}\,.$$

Правое тело имеет скорость:

$$u_2 = \frac{v-u'}{1-\dfrac{vu'}{c^2}} = \frac{c/2-c/2}{1-\dfrac{(c/2)(c/2)}{c^2}} = 0.$$

Нерелятивистский импульс нашей системы до столкновения равен:

$$mu_1 - mu_2 = \frac{4mc}{5}\,.$$

После столкновения получившееся тело массы M двигается со скоростью $v = c/2$. Его нерелятивистский импульс равен:

$$Mv = \frac{4m}{\sqrt{3}}\frac{c}{2} = \frac{2m}{\sqrt{3}}\,.$$

Как видим, $mu_1 - mu_2 \neq Mv$, то есть нерелятивистский импульс не сохраняется.

Оказывается, правильное выражение для импульса в теории относительности получается делением классического выражения на «релятивистский корень»: импульс тела массы m, двигающегося со скоростью $\vec{v}$, равен:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{7}$$

Давайте вернёмся к только что рассмотренному примеру и убедимся, что теперь с законом сохранения импульса всё будет в порядке.

Импульс системы до столкновения:

$$p_{\text{до}} = \frac{mu_1}{\sqrt{1-\dfrac{u_1^2}{c^2}}} - \frac{mu_2}{\sqrt{1-\dfrac{u_2^2}{c^2}}} = \frac{m(4c/5)}{\sqrt{1-\dfrac{(4c/5)^2}{c^2}}} - 0 = \frac{4mc/5}{3/5} = \frac{4mc}{3}\,.$$

Импульс после столкновения:

$$p_{\text{после}} = \frac{Mv}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{Mc/2}{\sqrt{1-\dfrac{(c/2)^2}{c^2}}} = \frac{(4m/\sqrt{3})(c/2)}{\sqrt{3}/2} = \frac{4mc}{3}\,.$$

Вот теперь всё правильно: $p_{\text{до}} = p_{\text{после}}$!

Связь энергии и импульса

Из формул (2) и (7) можно получить замечательное соотношение между энергией и импульсом в теории относительности. Возводим обе части этих формул в квадрат:

$$E^2 = \frac{m^2c^4}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\,, \quad p^2 = \frac{m^2v^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\,.$$

Преобразуем разность:

$$E^2 - p^2c^2 = \frac{m^2c^4}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} - \frac{m^2v^2c^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2c^2(c^2-v^2)}{\dfrac{c^2-v^2}{c^2}} = m^2c^4.$$

Это и есть искомое соотношение:

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4. \tag{8}$$

Данная формула позволяет выявить простую связь между энергией и импульсом фотона. Фотон имеет нулевую массу и движется со скоростью света. Как уже было замечено выше, сами по себе энергия и импульс фотона в СТО найдены быть не могут: при подстановке в формулы (2) и (7) значений $m = 0$ и $v = c$ мы получим нули в числителе и знаменателе. Но зато с помощью (8) легко находим: $E^2 - p^2c^2 = 0$, или

$$E = pc. \tag{9}$$

В квантовой физике устанавливается выражение для энергии фотона, после чего с помощью формулы (9) находится его импульс.

Релятивистское уравнение движения

Рассмотрим тело массы m, движущееся вдоль оси X под действием силы F. Уравнение движения тела в классической механике — это второй закон Ньютона: $ma = F$. Если за бесконечно малое время dt приращение скорости тела равно dv, то $a = dv/dt$, и уравнение движения запишется в виде:

$$m\frac{dv}{dt} = F. \tag{10}$$

Теперь заметим, что $mdv = d(mv) = dp$ — изменение нерелятивистского импульса тела. В результате получим «импульсную» форму записи второго закона Ньютона — производная импульса тела по времени равна силе, приложенной к телу:

$$\frac{dp}{dt} = F. \tag{11}$$

Все эти вещи вам знакомы, но повторить никогда не помешает ;-)

Классическое уравнение движения — второй закон Ньютона — является инвариантным относительно преобразований Галилея, которые в классической механике описывают переход из одной инерциальной системы отсчёта в другую (это означает, напомним, что при указанном переходе второй закон Ньютона сохраняет свой вид). Однако в СТО переход между инерциальными системами отсчёта описывается преобразованиями Лоренца, а относительно них второй закон Ньютона уже не является инвариантным. Следовательно, классическое уравнение движения должно быть заменено релятивистским, которое сохраняет свой вид под действием преобразований Лоренца.

То, что второй закон Ньютона (10) не может быть верным в СТО, хорошо видно на следующем простом примере. Допустим, что к телу приложена постоянная сила. Тогда согласно классической механике тело будет двигаться с постоянным ускорением; скорость тела будет линейно возрастать и с течением времени превысит скорость света. Но мы знаем, что на самом деле это невозможно.

Правильное уравнение движения в теории относительности оказывается совсем не сложным. *Релятивистское уравнение движения имеет вид* (11)*, где* p *— релятивистский импульс:*

$$\frac{d\left(\dfrac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)}{dt} = F. \tag{12}$$

Производная релятивистского импульса по времени равна силе, приложенной к телу.

В теории относительности уравнение (12) приходит на смену второму закону Ньютона.

Давайте выясним, как же в действительности будет двигаться тело массы m под действием постоянной силы F. При условии $F = \mathrm{const}$ из формулы (12) получаем:

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = Ft.$$

Остаётся выразить отсюда скорость:

$$v = \frac{cFt}{\sqrt{F^2t^2 + m^2c^2}}\,. \tag{13}$$

Посмотрим, что даёт эта формула при малых и при больших временах движения. Пользуемся приближёнными соотношениями при $\alpha \ll 1$:

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}\,, \tag{14}$$

$$\frac{1}{1+\alpha} \approx 1 - \alpha. \tag{15}$$

Формулы (14) и (15) отличаются от формул (3) и (4) только лишь знаком в левых частях. Очень рекомендую вам запомнить все эти четыре приближённых равенства — они часто используются в физике.

Итак, начинаем с малых времён движения. Преобразуем выражение (13) следующим образом:

$$v = \frac{cFt}{mc\sqrt{1+\dfrac{F^2t^2}{m^2c^2}}}\,.$$

При малых t имеем:

$$\frac{F^2t^2}{m^2c^2} \ll 1.$$

Последовательно пользуясь нашими приближёнными формулами, получим:

$$v \approx \frac{cFt}{mc\left(1+\dfrac{1}{2}\dfrac{F^2t^2}{m^2c^2}\right)} \approx \frac{Ft}{m}\left(1-\frac{F^2t^2}{2m^2c^2}\right).$$

Выражение в скобках почти не отличается от единицы, поэтому при малых t имеем:

$$v \approx \frac{Ft}{m} = at\,.$$

Здесь $a = F/m$ — ускорение тела. Мы получили результат, хорошо известный нам из классической механики: скорость тела линейно растёт со временем. Это и не удивительно — при малых временах движения скорость тела также невелика, поэтому мы можем пренебречь релятивистскими эффектами и пользоваться обычной механикой Ньютона.

Теперь переходим к большим временам. Преобразуем формулу (13) по-другому:

$$v \approx \frac{cFt}{Ft\sqrt{1+\dfrac{m^2c^2}{F^2t^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1+\dfrac{m^2c^2}{F^2t^2}}}\,.$$

При больших значениях t имеем:

$$\frac{m^2c^2}{F^2t^2} \ll 1,$$

и тогда:

$$v \approx \frac{c}{1+\dfrac{1}{2}\dfrac{m^2c^2}{F^2t^2}} \approx c\left(1-\frac{m^2c^2}{2F^2t^2}\right).$$

Хорошо видно, что при $t \to \infty$ скорость тела v неуклонно приближается к скорости света c, но всегда остаётся меньше c — как того и требует теория относительности.

Зависимость скорости тела от времени, даваемая формулой (13), графически представлена на рис. 2.

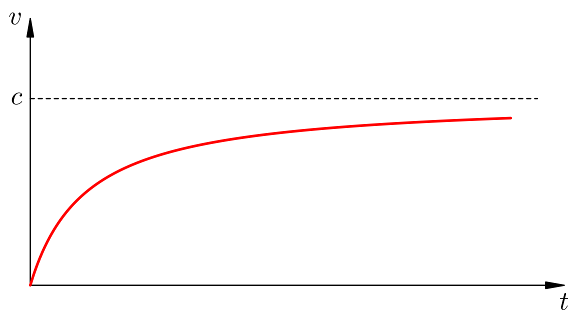

Рис. 2. Разгон тела под действием постоянной силы

Начальный участок графика — почти линейный; здесь пока работает классическая механика. Впоследствии сказываются релятивистские поправки, график искривляется, и при больших временах наша кривая асимптотически приближается к прямой $v = c$.