Переходные процессы

В данном листке нас будет интересовать процесс перехода некоторых систем в стационарное состояние. Физическая природа переходных процессов может быть различной, но интересен тот факт, что во всех случаях зависимость рассматриваемой величины x от времени описывается уравнением

$$x(t) = x_\infty \left(1 - e^{-t/\tau}\right). \tag{1}$$

Задача 1. Постройте график функции (1). Укажите (приблизительно) точку графика с абсциссой τ.

$x(\tau) \approx 0{,}63x_\infty$

Величина x_∞ называется *установившимся* (или *стационарным*) значением величины $x(t)$, а константа τ есть *постоянная времени* рассматриваемого переходного процесса.

Задача 2. При каких временах величина x отличается от своего установившегося значения: а) менее чем на 10%; б) менее чем на 1%?

а) $t > \tau \ln 10 \approx 2{,}3\tau$; б) $t > \tau \ln 100 \approx 4{,}6\tau$

Как видим, постоянная времени τ служит оценкой времени перехода системы в стационарное состояние.

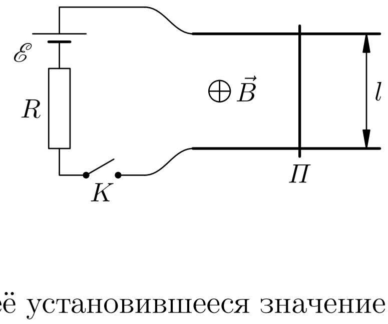
Задача 3. Последовательно соединены: идеальный источник постоянной ЭДС $\mathscr{E}$, резистор R, незаряженный конденсатор ёмкости C и разомкнутый ключ. Ключ замыкают. Найдите зависимость $q(t)$ заряда конденсатора от времени, его установившееся значение и постоянную времени.

$q_\infty = C\mathscr{E}$, $\tau = RC$

Задача 4. Последовательно соединены: идеальный источник постоянной ЭДС $\mathscr{E}$, резистор R, идеальная катушка индуктивности L и разомкнутый ключ. Ключ замыкают. Найдите зависимость $I(t)$ тока в цепи от времени, его установившееся значение и постоянную времени.

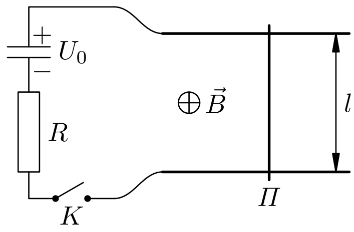
$I_\infty = \frac{\mathscr{E}}{R}$, $\tau = \frac{L}{R}$

Задача 5. На двух длинных гладких параллельных и горизонтально расположенных проводящих рельсах лежит проводящая перемычка Π массой m. Расстояние между рельсами равно l. Через резистор сопротивлением R и разомкнутый ключ K к штангам подключена батарея постоянной ЭДС $\mathscr{E}$ (см. рисунок). Штанги расположены в области однородного вертикального магнитного поля B. Ключ замыкают. Пренебрегая внутренним сопротивлением батареи, сопротивлением штанг и перемычки, найдите зависимость $v(t)$ скорости перемычки от времени, её установившееся значение и постоянную времени.



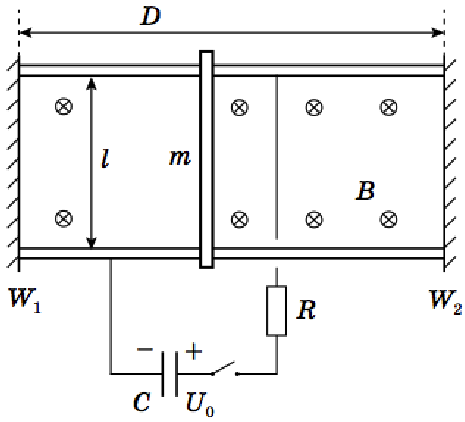
$v_\infty = \frac{\mathscr{E}}{Bl}$, $\tau = \frac{mR}{B^2l^2}$

Задача 6. В предыдущей задаче источник $\mathscr{E}$ заменили на конденсатор ёмкости C с начальным напряжением U_0 (рис.). Найти зависимость $v(t)$ скорости перемычки от времени, её установившееся значение и постоянную времени.



$\boxed{v_\infty = \frac{CU_0Bl}{m+B^2l^2C},\ \tau = \frac{mRC}{m+B^2l^2C}}$

Задача 7. (*Всеросс., 2018, финал, 11*) По двум горизонтальным проводящим рельсам может скользить без трения металлическая перемычка массой m (см. рис.). Расстояние между рельсами l. Движение перемычки ограничено двумя непроводящими жёсткими вертикальными стенками W_1 и W_2, находящимися на расстоянии D друг от друга. К рельсам через ключ K последовательно подключены заряженный до напряжения U_0 конденсатор ёмкости C и резистор сопротивления R. Перпендикулярно плоскости рельсов включено вертикальное однородное магнитное поле с индукцией B, такое, что $m > B^2l^2C$ и $DBl \gg RCU_0$. В момент, когда ключ замкнули, перемычка покоилась посередине между стенками. Определите:



1) с какой стенкой произойдёт первое столкновение перемычки;
2) скорость v_1 перед первым столкновением;
3) скорость v_n перед n-м столкновением.

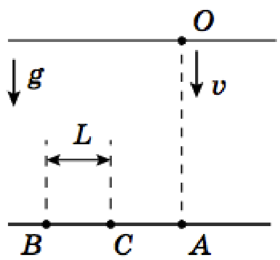
Все столкновения перемычки со стенками абсолютно упругие.

$\boxed{v_1 = \frac{CU_0Bl}{m+B^2l^2C};\ v_n = v_1\left(\frac{m-B^2l^2C}{m+B^2l^2C}\right)^n}$

Задача 8. Непосредственно над поверхностью глубокой реки отпускают без начальной скорости железный шарик массы m. Найдите зависимость $v_x(t)$ горизонтальной скорости шарика от времени, её установившееся значение и постоянную времени. На шарик со стороны воды действует сила $\vec{f} = -k\vec{v}_{\text{отн}}$, пропорциональная скорости шарика относительно воды. Скорость течения u постоянна по всей глубине реки. Силой Архимеда пренебречь.

$\boxed{v_\infty = u,\ \tau = \frac{m}{k}}$

Задача 9. (*Всеросс., 2018, финал, 11*) Из точки O на поверхности воды в реку бросают одинаковые маленькие металлические шарики (см. рис.). Отпущенный без начальной скорости шарик упал на дно в точке B, а шарик, запущенный вертикально вниз с известной скоростью v — в точку C. Расстояние $BC = L$. Найдите горизонтальную составляющую u_x скорости второго шарика при ударе о дно. Считайте, что при движении на шарик со стороны воды действует сила, прямо пропорциональная скорости движения шарика относительно воды и направленная против этой скорости. Скорость течения не зависит от глубины, а дно горизонтально. Силу Архимеда не учитывать.



$\boxed{u_x = \frac{gL}{v}}$