Принцип Ферма

Законы геометрической оптики можно вывести из одного-единственного постулата, который называется *принципом Ферма* или *принципом наименьшего времени.*

Принцип Ферма. Среди всех путей, ведущих из точки A в точку B, луч света выберет тот путь, время прохождения которого минимально.

Задача 1. Покажите, как из принципа Ферма вытекает:
1) прямолинейность распространения света в однородной среде;
2) закон отражения;
3) закон преломления;
4) обратимость хода лучей.

Задача 2. Пучок света от точечного источника S фокусируется линзой в точке S' (действительном изображении источника). Это значит, что любой параксиальный луч, вышедший из S, после преломления в линзе проходит через S'; таким образом, свету «всё равно», по какой траектории идти из S в S'. Как эта множественность траекторий согласуется с принципом Ферма?

Задача 3. Покажите с помощью принципа Ферма, что луч, вышедший из одного фокуса эллипса, после отражения от эллипса попадает в другой фокус.

Задача 4. (*Параболическое зеркало*) Рассмотрим систему координат Oxy. Световые лучи идут параллельно оси Oy «сверху вниз» (т. е. в её отрицательном направлении) и после зеркального отражения от графика функции $y = f(x)$ собираются в точке $(0, F)$. Найдите функцию f.

Указание. Возьмите прямую $y = a$ (фронт падающей волны) и два луча — с абсциссами 0 и x. Приравняйте длины их путей от фронта до фокуса.

$\boxed{y = \frac{x^2}{4F}}$

Задача 5. Для дальнейших выводов пригодятся две приближённые геометрические формулы.

1) Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, x и гипотенузой l, в котором один катет много меньше другого: $x \ll a$. Покажите, что

$$l \approx a + \frac{x^2}{2a}\,.$$

2) Напомним, что *сегментом* называется часть круга, отсекаемая хордой. Назовём *шириной* сегмента длину отрезка, соединяющего середину дуги и середину хорды. Пусть от круга радиуса R отсекается маленький сегмент, хорда которого имеет длину $2x \ll R$. Покажите, что ширина этого сегмента

$$\delta \approx \frac{x^2}{2R}\,.$$

Фокусировка сферической поверхностью

Как мы знаем, линза есть тело, ограниченное двумя сферическими поверхностями. Поэтому прежде чем изучать линзу, следует рассмотреть преломление света на *одной* сферической поверхности.

Задача 6. Точечный источник S расположен в воздухе на расстоянии a от *выпуклой* (т. е. обращённой выпуклостью к источнику) сферической поверхности радиуса R, показатель преломления которой равен n. Предположим, что поверхность создаёт действительное изображение S', находящееся на расстоянии b от неё (т. е. $SS' = a + b$). Покажите, что

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{R}\,. \tag{1}$$

Указание. Приравняйте времена по прямой и немного смещённой траекториям.

Задача 7. Перейдя в формуле (1) к пределу при $a \to \infty$, найдите фокусное расстояние f_b сферической поверхности. Убедитесь, что формулу (1) можно записать в виде

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{n}{f_b}\,.$$

(Смысл индекса в обозначении f_b скоро прояснится.)

$\boxed{f_b = \frac{nR}{n-1}}$

Задача 8. Перейдя в формуле (1) к пределу при $b \to \infty$, найдите фокусное расстояние f_a сферической поверхности. Убедитесь, что формулу (1) можно записать в виде

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{1}{f_a}\,.$$

При каком соотношении между a и f_a изображение источника будет действительным?

$\boxed{f_a = \frac{R}{n-1};\ \text{при } a > f_a}$

Задача 9. Рассмотрите случай $a < f_a$. Убедитесь на рисунке, что изображение получается мнимым. Что изменится в формуле (1)?

Задача 10. Перейдите в формуле (1) к пределу при $R \to \infty$ и изучите соответствующую физическую ситуацию.

Задача 11. Предположим теперь, что сферическая поверхность является не выпуклой, а *вогнутой*. Покажите на рисунке изображение источника S. Формула (1) сохраняет свой вид и в этом случае; какие величины в ней следует считать отрицательными?

Задача 12. Убедитесь, что формула (1) при $n = -1$ описывает сферическое зеркало (при определённых предположениях о знаках величин a, b, R).

Задача 13. Теперь рассмотрим общую ситуацию. Пусть источник S находится в среде с показателем преломления n_a на расстоянии a от сферической поверхности, имеющей радиус R и показатель преломления n_b; изображение S' находится на расстоянии b от поверхности. Покажите, что

$$\frac{n_a}{a} + \frac{n_b}{b} = \frac{n_b - n_a}{R}\,.$$

Найдите фокусные расстояния f_a и f_b. Убедитесь, что $f_a/n_a = f_b/n_b$.

Фокусировка тонкой линзой

Переходим к рассмотрению *тонкой* линзы, толщина которой много меньше радиусов её сферических поверхностей.

Задача 14. Вернёмся к формуле (1) и рассмотрим *двояковыпуклую* линзу с радиусами сферических поверхностей R_1, R_2 и показателем преломления n. Линза находится в воздухе, точечный источник света S — на расстоянии a от неё. Изображение S' источника находится на расстоянии b от линзы.

1) Покажите на рисунке изображение S'. Покажите изображение S_1 источника S, даваемое первой поверхностью. Убедитесь, что S_1 есть мнимое изображение источника в S', даваемое второй поверхностью.

2) Запишите формулу (1) для пар (S, S_1) и (S', S_1). Выведите отсюда *формулу тонкой линзы*:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{2}$$

или

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

где

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

есть оптическая сила линзы (величина, обратная фокусному расстоянию).

Задача 15. Убедитесь, что формула (2) справедлива для любой другой тонкой линзы: плосковыпуклой, плоско-вогнутой, выпукло-вогнутой, вогнуто-выпуклой и двояковогнутой. При каком соглашении о знаках величин?

Задача 16. Немного изменим обозначения и перейдём к самой общей ситуации. Пусть имеется тонкая линза с радиусами сферических поверхностей R_a, R_b и показателем преломления n. Со стороны первой поверхности (R_a) находится среда с показателем преломления n_a, со стороны второй — среда с показателем преломления n_b. Выведите обобщение формулы (2):

$$\frac{n_a}{a} + \frac{n_b}{b} = \frac{n - n_a}{R_a} + \frac{n - n_b}{R_b}.$$