

## Закон преломления

Вся необходимая теория имеется в статье «[Преломление света](#)» базового курса.

### Плоская поверхность

ЗАДАЧА 1. Найдите угол падения светового луча на поверхность стекла, если преломлённый луч перпендикулярен отражённому. Скорость света в воздухе равна  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с; скорость света в стекле —  $v = 2 \cdot 10^8$  м/с.

$$\sin \alpha \approx \frac{v}{c} \sin \beta = v$$

ЗАДАЧА 2. Палка с изломом посередине погружена в пруд так, что наблюдателю, находящемуся на берегу и смотрящему вдоль надводной части палки, она кажется прямой, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом. Чему равен (острый) угол  $\beta$  излома палки? Показатель преломления воды  $n = 4/3$ .

$$\left(\frac{u}{v \sin \alpha}\right) \sin \beta = v - \frac{c}{u} = \beta$$

ЗАДАЧА 3. В горизонтальное дно озера, имеющего глубину  $H$ , вбита свая высотой  $h$  (над поверхностью дна). Найдите длину тени сваи на дне озера. Солнечные лучи падают на поверхность воды под углом  $\alpha$ , показатель преломления воды равен  $n$ . Рассмотрите два случая: 1)  $h < H$ ; 2)  $h > H$ .

$$\frac{v \sin \alpha - c \sin \beta}{v \sin H} + v \sin(H - \beta) = l \left( \frac{v \sin \alpha - c \sin \beta}{v \sin \beta} = l \right)$$

ЗАДАЧА 4. На горизонтальном дне водоёма, имеющего глубину  $H$ , лежит плоское зеркало. Луч света падает на поверхность воды под углом  $\alpha$ . На каком расстоянии от места падения луч снова выйдет на поверхность воды после отражения от зеркала? Показатель преломления воды равен  $n$ .

$$\frac{v \sin \alpha - c \sin \beta}{v \sin H} = l$$

ЗАДАЧА 5. На поверхности водоёма, имеющего глубину  $H$ , плавает фанерный круг радиуса  $r$ , над центром которого на некоторой высоте  $h$  расположен точечный источник света. При какой величине  $h$  радиус  $R$  тени от круга на дне водоёма будет максимальным? Найдите этот максимальный радиус. Показатель преломления воды равен  $n$ .

$$0 = \beta \text{ или } \frac{1 - c \sin \beta}{H} + l = R_{\max}$$

ЗАДАЧА 6. (МФТИ, 1994) На спокойной поверхности водоёма появилось пятно загрязнения радиуса  $R = 5$  м, не пропускающее свет. Определите размер области на дне водоёма, куда не попадает свет. Поверхность воды освещается рассеянным светом. Глубина водоёма  $H = 2,6$  м. Показатель преломления воды  $n = 4/3$ . Отражение от дна не учитывать.

$$r \approx \frac{1 - c \sin \beta}{H} - R = r$$

ЗАДАЧА 7. (МФТИ, 1994) Поверхность озера глубиной  $H = 1,3$  м покрыта тонким слоем льда со снегом, практически не пропускающим свет. Найти площадь светлого пятна на дне озера от полыньи в форме круга радиуса  $R = 2$  м. Озеро освещается рассеянным светом. Показатель преломления воды  $n = 4/3$ .

$$z^n \approx \frac{1 - z^u/\Lambda}{H} + y \quad y = S$$

ЗАДАЧА 8. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) В ясный солнечный день на поверхности пруда плавают плот, отбрасывая на горизонтальное дно пруда тень в форме квадрата со стороной  $2a = 2$  м. Какова глубина пруда, если при затягивании неба сплошной облачностью тень на дне пруда вырождается в точку? Показатель преломления воды относительно воздуха  $n = 1,33$ . Поверхность воды считать гладкой. Толщиной плота пренебречь.

$$n \approx 1 - z^u/\Lambda = H$$

ЗАДАЧА 9. (МФТИ, 1981) Радиопередатчик, работающий на спутнике, позволяет фиксировать его угловое положение. Однако преломление радиоволн в атмосфере приводит при этом к небольшой ошибке. Так, для спутника, видимого под углом  $45^\circ$  к вертикали, ошибка составляет две угловых минуты. Определить показатель преломления радиоволн атмосферой, считая её толщину малой по сравнению с высотой, на которой летит спутник.

$$9000' \approx u$$

ЗАДАЧА 10. (МОШ, 2015, 11) Внутри прозрачного шестигранного корпуса шариковой ручки имеется круглый канал, заполненный чернилами. При рассматривании тёмного канала через прозрачный корпус было отмечено, что вращение корпуса вокруг его оси симметрии приводит к изменению видимой толщины канала с чернилами. Ширина видимой тёмной полосы максимальна, когда ближайшее ребро шестигранника, ось симметрии ручки и глаз наблюдателя лежат в одной плоскости. Отношение максимальной видимой толщины канала к его минимальной видимой толщине при неизменном расстоянии от ручки до глаза (которое во много раз больше толщины ручки) равно двум. Отношение диаметра  $d$  канала к длине  $L$  стороны шестигранника равно  $d/L = \sqrt{3}/4$ . Найдите показатель преломления  $n$  материала, из которого сделан корпус.

$$z = u$$

## Плоскопараллельная пластинка

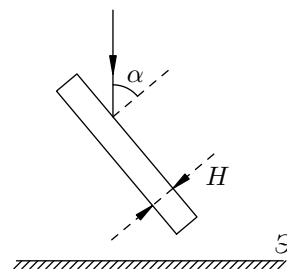
ЗАДАЧА 11. Световой луч падает под углом  $\alpha$  на поверхность стеклянной плоскопараллельной пластинки толщиной  $d$ . Найдите величину сдвига луча на выходе из пластинки (то есть расстояние между вышедшим лучом и падающим). Показатель преломления стекла равен  $n$ .

$$\left( \frac{n \cos \alpha - \cos \beta}{n \cos \alpha} - 1 \right) d \cos \alpha = s$$

ЗАДАЧА 12. На какое расстояние сместится луч света, распространяющийся в стекле с показателем преломления  $n$ , если на его пути имеется плоскопараллельная щель ширины  $d$ , заполненная воздухом? Угол падения луча на щель равен  $\alpha$ , полного отражения не происходит.

$$\left( 1 - \frac{n \cos \alpha - \cos \beta}{n \cos \alpha} \right) d \cos \alpha = s$$

ЗАДАЧА 13. (МФТИ, 1987) Луч света падает на плоскопараллельную пластинку толщиной  $H = 1$  см из стекла с показателем преломления  $n = 1,73$  (см. рисунок). Из-за многократных отражений от граней пластинки на экране Э образуется ряд светлых пятен. Найдите расстояние между пятнами, если угол падения  $\alpha = 60^\circ$ , а падающий луч перпендикулярен плоскости экрана. Плоскость падения луча совпадает с плоскостью рисунка.



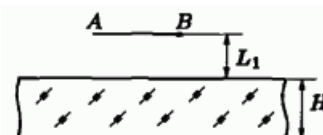
$$\Delta x \approx \frac{v_{\text{ст}} \sin \alpha - c \sin \alpha}{v_{\text{ст}} \sin \alpha} H = x$$

ЗАДАЧА 14. (МФТИ, 1987) На плоскопараллельную стеклянную пластинку, нижняя грань которой посеребрена, падает под углом  $\alpha = 30^\circ$  узкий пучок света, содержащий излучение двух длин волн. Показатель преломления стекла для одной длины волны равен  $n_1$ , а для другой —  $n_2$  ( $n_2 > n_1$ ). В результате первого преломления на верхней грани, однократного отражения от нижней и ещё одного преломления на верхней грани из пластинки выходят два пучка света. Найдите расстояние между пучками, вышедшими из пластинки, если её толщина равна  $H$ .

$$\left( \frac{1 - \frac{c}{v_1} \sin \alpha}{1} - \frac{1 - \frac{c}{v_2} \sin \alpha}{1} \right) \sin \alpha H = s$$

ЗАДАЧА 15. (Всеросс., 2003, ОЭ, 9) В шестидесятых годах прошлого века группа советских физиков во главе с доктором физико-математических наук Виктором Георгиевичем Веселаго занималась поиском веществ, обладающих отрицательным показателем преломления. Поведение таких веществ было рассмотрено теоретически в статье, опубликованной в 1967 г. в журнале «Успехи физических наук» (том 92). В частности, в статье было показано, что остаётся справедливым закон преломления Снелля ( $n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2$ , где  $\varphi_1$  — угол падения,  $\varphi_2$  — угол преломления, а  $n_1$  и  $n_2$  — соответствующие показатели преломления). При этом плоскопараллельная пластинка может при некоторых условиях быть идеальной «линзой». К сожалению, тогда найти вещества с такими свойствами не удалось. Однако в 2000 году группой физиков из университета Сан-Диего были созданы композитные материалы, обладающие отрицательным показателем преломления. . .

Над прозрачной плоскопараллельной пластинкой, обладающей отрицательным показателем преломления  $n = -1$ , находится светящаяся стрелка  $AB$  (рис.). Расстояние от неё до пластинки  $L_1 = 6$  см, толщина пластинки  $H = 10$  см. Под пластинкой возникает изображение  $A'B'$  стрелки  $AB$ . Покажите построением, как получается это изображение. На каком расстоянии  $L_2$  от нижней



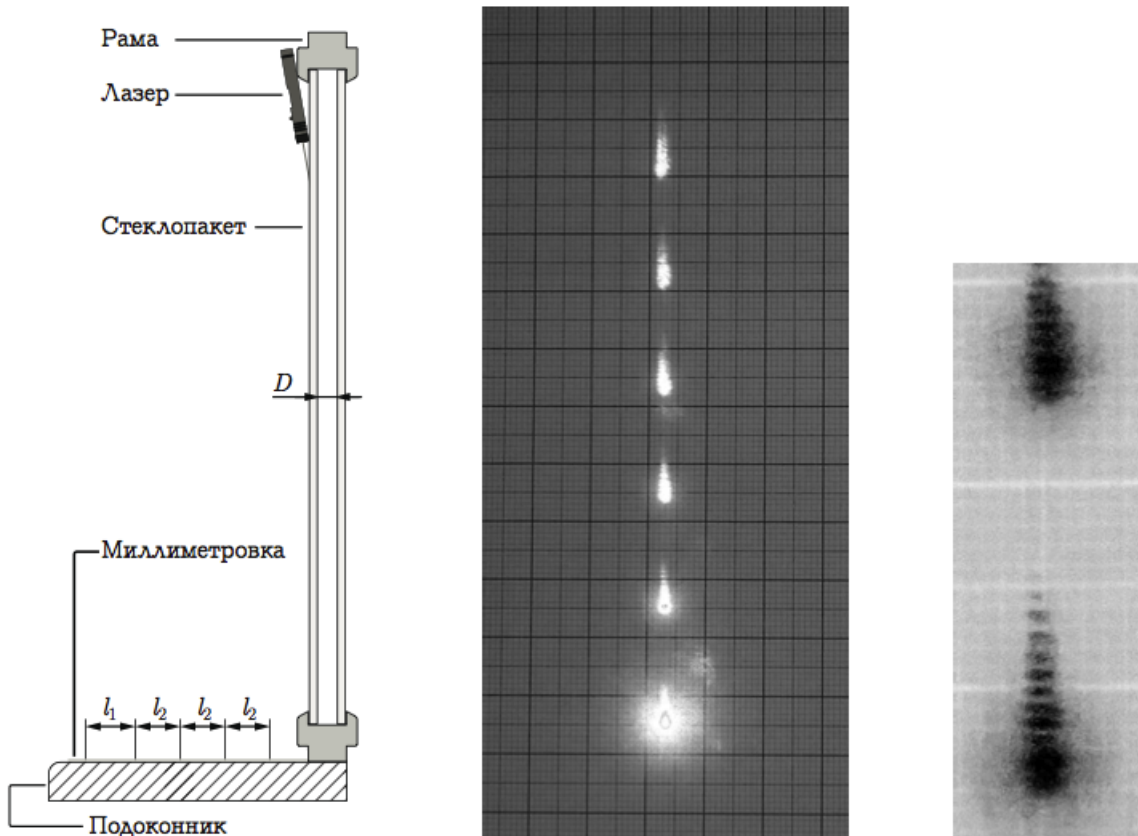
стороны плоскопараллельной пластинки будет находиться изображение  $A'B'$ ? Действительным или мнимым будет это изображение? Найдите увеличение  $k$ , даваемое такой пластинкой в рассматриваемом случае. Будет ли это изображение единственным во всём пространстве? Отражения от границ раздела пластинка–воздух не учитывать.

$$L_2 = H - L_1 = 4 \text{ см; действительное; } k = 1; \text{ будет два изображения}$$

ЗАДАЧА 16. (МОШ, 2019, 10) Используя мощную лазерную указку, осуществляют эксперимент, схема которого показана на левом рисунке. На стекло одинарного стеклопакета (состоит из двух параллельно расположенных стёкол толщиной 3 – 5 мм) направляют лазерный луч сверху вниз под малым углом (порядка 0,1 рад) к поверхности стекла. При этом на масштабной бумаге (миллиметровке), которая лежит на подоконнике, наблюдают систему ярких пятен (см. рисунок в центре). Известно, что расстояние между первым (самым ярким) и вторым пятнами равно  $l_1 = 20 \pm 2$  мм, а между следующими соседними  $l_2 = 19 \pm 2$  мм. Эти рас-

стояния определяются по положению самой яркой области пятна. На правом рисунке показан сильно увеличенный фрагмент фотографии с центрального рисунка, инвертированный (чёрное заменено на белое и наоборот) для удобства восприятия. Найдите по данным эксперимента расстояние  $D$  между внутренними поверхностями стёкол. Оцените погрешность полученного результата.

Возможно, при анализе эксперимента вам потребуется значение показателя преломления для стекла. Для разных марок стекла показатель преломления лежит в пределах от 1,4 до 1,7.



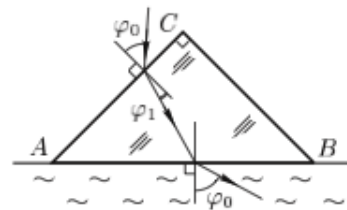
$$D = 9,5 \pm 1,0 \text{ мм}$$

## Призма

Задача 17. (МФТИ, 1975) Для определения показателя преломления жидкости её помещают в кювету, имеющую вид равнобедренной призмы с углом при вершине  $\varphi$ . Призма освещается параллельным пучком света таким образом, что лучи внутри жидкости идут параллельно основанию. Оказалось, что угол отклонения вышедшего пучка от первоначального направления распространения равен  $\delta$ . Найти показатель преломления жидкости.

$$n = \frac{\sin \frac{\delta + \varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}$$

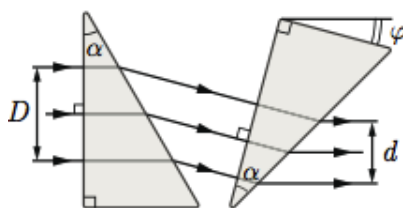
ЗАДАЧА 18. (Всеросс., 2010, РЭ, 11) Поверхности воды касается равнобедренная стеклянная призма  $ABC$  (см. рисунок). Луч света, падающий из воздуха под углом  $\varphi_0$  на грань  $AC$ , после прохождения призмы выходит через грань  $AB$  под тем же углом  $\varphi_0$ . Чему равен угол преломления  $\varphi_1$ ?



Показатель преломления воды  $n_0 = 4/3$ , угол  $C$  при вершине призмы — прямой. Величина угла  $\varphi_0$  неизвестна.

$$\varphi_1 \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \varphi_0 = \varphi_0$$

ЗАДАЧА 19. (МОШ, 2019, 11) Две одинаковые призмы ( $\alpha = 30^\circ$ , рис.), изготовленные из материала с показателем преломления  $n$ , используют для изменения поперечного размера пучка параллельных лучей.

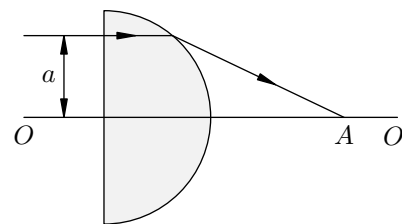


- Для  $n = 1,73$  найдите угол  $\varphi$  между основаниями призм.
- Найдите для произвольного  $n$  отношение  $\frac{d}{D}$ . Какие значения может принимать  $n$ ?

$$\frac{d}{D} \approx \frac{1}{n} \left( 2 - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n > 2)$$

## Шар

ЗАДАЧА 20. (МФТИ, 1994) Тонкий пучок лучей света падает перпендикулярно на плоскую поверхность половины оптически прозрачного шара (см. рисунок). Радиус шара  $R$ , расстояние от луча до оси  $OO'$ , проходящей через центр шара  $O$ , равно  $a = 0,6R$ , показатель преломления материала шара  $n = 4/3$ . Найти расстояние от точки  $O$  до точки  $A$  пересечения луча, преломлённого на сферической поверхности, с осью  $OO'$ .



$$\frac{a}{R} = \frac{1}{n}$$

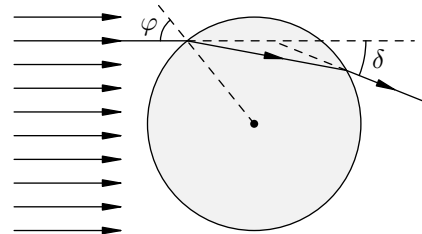
ЗАДАЧА 21. (МФТИ, 1994) Оптически прозрачный шар радиуса  $R$  помещён в параллельный пучок лучей света. Минимальное расстояние, пройденное одним из преломлённых лучей внутри шара (до первого пересечения с поверхностью), оказалось равным  $R\sqrt{7}/2$ . Найти показатель преломления материала шара.

$$n = \frac{4}{3}$$

ЗАДАЧА 22. (МФТИ, 1994) Луч света падает на поверхность стеклянного шара параллельно некоторой оси  $OO'$ , проходящей через его центр. Угол падения этого луча на поверхность шара  $\varphi = \arcsin(24/25)$ . Преломлённый луч проходит через точку пересечения этой оси с поверхностью шара. Найти показатель преломления стекла.

$$9^{\circ}1 = u$$

ЗАДАЧА 23. (МФТИ, 1994) Шар из оптически прозрачного материала помещён в параллельный пучок света (см. рисунок). Угол падения одного из лучей на поверхность шара  $\varphi = \arctg(4/3)$ . Угол его отклонения от первоначального направления после двух преломлений на поверхности шара  $\delta = 2 \arctg(7/24)$ . Найти показатель преломления материала шара.



$$n = 4/3$$

ЗАДАЧА 24. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Точечный источник света расположен в воздухе практически вплотную к поверхности прозрачного шара. При этом все лучи от этого источника, попадающие внутрь шара, после выхода из него в воздух пересекаются с лучом, проходящим через центр шара. Что можно сказать о показателе преломления вещества этого шара?

$$z < u$$

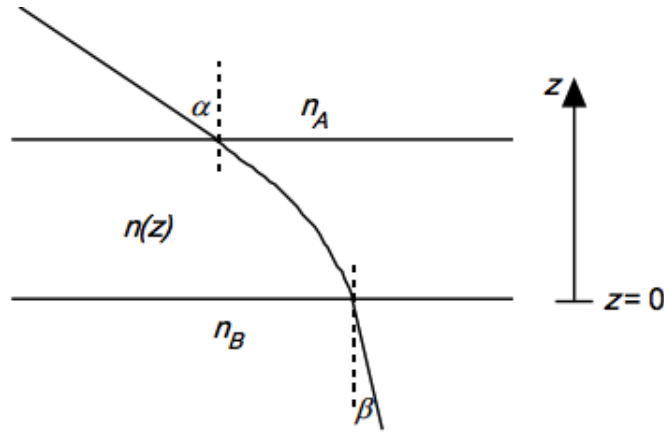
ЗАДАЧА 25. (Всеросс., 2018, финал, 11) В далёком космосе есть планета, состоящая полностью из воды. Известно, что глубоководные обитатели изнутри могут обозреть всё пространство вокруг тогда и только тогда, когда находятся на расстоянии не более чем  $x = 3000$  км от центра планеты. Местные жители решили запустить спутник. С какой скоростью он должен двигаться на самой низкой возможной орбите? Показатель преломления воды  $n = 4/3$ , плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, гравитационная постоянная  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Н · м<sup>2</sup>/кг<sup>2</sup>. Планета не вращается вокруг своей оси, волн на её поверхности не бывает, воду можно считать несжимаемой.

$$c/\text{мкс} \quad 1,2 = \sigma_{\text{Г}} \frac{\xi}{\eta} \sqrt{\lambda x u} = a$$

## Слоистые среды

ЗАДАЧА 26. (IPhO, 1984) [Русский перевод из «Кванта»]

а) Consider a plane-parallel transparent plate, where the refractive index,  $n$ , varies with distance,  $z$ , from the lower surface (see figure). Show that  $n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta$ . The notation is that of the figure.



b) Assume that you are standing in a large flat desert. At some distance you see what appears to be a water surface. When you approach the «water» it seems to move away such that the distance to the «water» is always constant. Explain the phenomenon.

c) Compute the temperature of the air close to the ground in b) assuming that your eyes are located 1.60 m above the ground and that the distance to the «water» is 250 m. The refractive index of the air at 15°C and at normal air pressure (101.3 kPa) is 1.000276. The temperature of the air more than 1 m above the ground is assumed to be constant and equal to 30°C. The atmospheric pressure is assumed to be normal. The refractive index,  $n$ , is such that  $n - 1$  is proportional to the density of the air. Discuss the accuracy of your result.

$$\frac{1 - \frac{zH + zT \wedge}{T} \left( \frac{(1 - \varrho \tau u) \frac{\partial \varrho_L}{\partial T} + 1}{\varrho \tau_L (1 - \varrho \tau u)} \right)}{\varrho \tau_L (1 - \varrho \tau u)} = \mathcal{L}$$

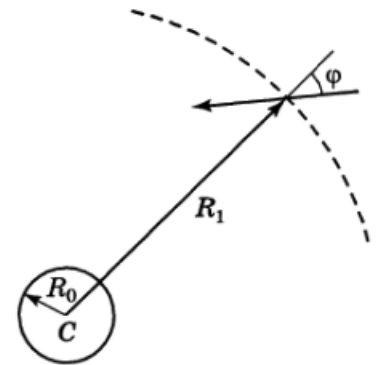
ЗАДАЧА 27. (APhO, 2004)<sup>1</sup>

- [Optical fiber / Оптическое волокно.](#)
- [Solution.](#)

ЗАДАЧА 28. (Всеросс., 1999, финал, 11) Лазерный луч распространяется в сферически симметричной среде с показателем преломления

$$n(R) = n_0 \frac{R}{R_0},$$

где  $n_0 = 1$ ,  $R_0 = 30$  см,  $R_0 \leq R \leq \infty$ . Траектория луча лежит в плоскости, проходящей через центр  $C$  симметрии среды. Известно, что на расстоянии  $R_1 = 80$  см от точки  $C$  лазерный луч образует с радиус-вектором, проведённым из этого центра, угол  $\varphi = 30^\circ$  (рис.). На какое минимальное расстояние приблизится лазерный луч к центру симметрии среды?

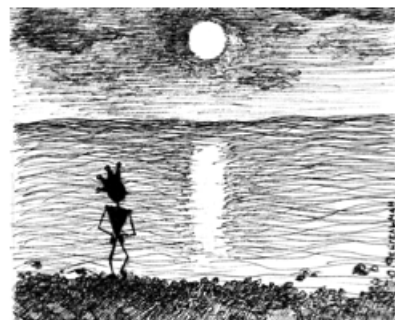


$$R_{\min} = \frac{R_0^2}{R_1} = 56.6 \text{ см}$$

<sup>1</sup>Русский перевод выполнен плохо, поэтому советую по возможности использовать английскую версию.

## Разные ситуации

ЗАДАЧА 29. (Всеросс., 2019, финал, 11) В открытом море вода совсем синяя, как лепестки самых красивых васильков, и прозрачная, как чистое стекло, — но зато и глубоко там! Ни один якорь не достанет до дна; на дно моря пришлось бы поставить одну на другую много-много колоколен, только тогда бы они могли высунуться из воды. На самом дне живут русалки.



Г.Х. Андерсен.

Ясной ночью принц, ростом  $H = 1,8$  м, мечтал на берегу спокойного Тихого океана и смотрел на лунную дорожку, которая начиналась от него на расстоянии  $D_{\Pi} = 5$  м по горизонтали и имела длину  $L_{\Pi} = 50$  м. В это же самое время у берега под водой на глубине  $H$  лежала Русалочка, тоже о чем-то мечтающая.

1. На каком расстоянии  $D_{\text{Р}}$  от себя (тоже по горизонтали) лунную дорожку будет видеть Русалочка?
2. Какой длины  $L_{\text{Р}}$  будет эта дорожка?

Считайте, что легкий бриз создает мелкую одинаковую рябь по всей поверхности океана. Показатель преломления морской воды  $n = 1,35$ . Угловым размером Луны можно пренебречь.

Указание.

- Бриз, -а, м. Слабый береговой ветер, дующий днём с моря на сушу, а ночью с суши на море.
- Рябь, -и, ж.
  1. Мелкое волнение водной поверхности. Озеро *подёрнулось рябью*.
  2. Ощущение в глазах пестроты, множества разноцветных точек. *В глазах р.*

С.И. Ожегов и Н.Ю. Шведова  
Толковый словарь русского языка

$$D_{\text{Р}} = 1,67 \text{ м}; L_{\text{Р}} = 0,48 \text{ м}$$

ЗАДАЧА 30. (Всеросс., 2017, финал, 11) Как известно, Солнце не является точечным источником света, а имеет малый угловой диаметр (при наблюдении с Земли)  $2\delta = 0,52^\circ$ . Этот факт приводит к тому, что область полной тени за Землёй оказывается конечной.

1. Пусть рефракция (явление преломления солнечных лучей в земной атмосфере) отсутствует. На каком расстоянии  $L_1$  от Земли ещё будет наблюдаться полная тень? Найдите продолжительность полного лунного затмения в этом случае.
2. В действительности рефракция оказывает существенное влияние на размер области полной тени. Пусть атмосфера Земли имеет приведённую высоту  $h = 8$  км и средний показатель преломления  $n = 1,00028$ .

Полагая, что границу тени образуют лучи, идущие по касательной к поверхности Земли,



определите, на каком максимальном расстоянии  $L_2$  теперь будет наблюдаться полная тень. Какая часть площади лунного диска окажется затемнена?

Радиус Земли  $R = 6400$  км, ускорение свободного падения  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>, угловой диаметр Луны равен угловому диаметру Солнца  $2\delta$ , период обращения Луны вокруг Земли  $T_0 = 27,3$  сут.

$$1. L_1 = \frac{g}{R} \approx 1,4 \cdot 10^6 \text{ км}, T \approx 1,6 \text{ ч}; 2. L_2 = \frac{R}{\sqrt{\frac{g}{R} + \delta^2}} \approx 4,08 \cdot 10^5 \text{ км}, \varepsilon \approx 0,048$$