

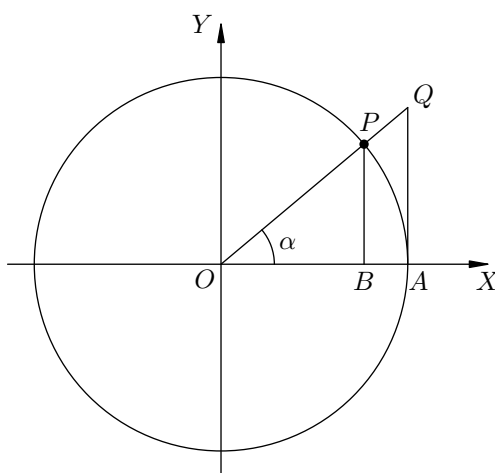
## Преломление. Малые углы

В некоторых задачах оптики нас интересуют только *параксиальные* световые лучи, то есть лучи, которые образуют очень малые углы с некоторой выделенной осью (например, с осью оптической системы или с направлением луча зрения). Это связано с тем, что во многих случаях лишь параксиальные лучи формируют изображение рассматриваемого объекта.

Для малого угла  $\alpha$ , выраженного в радианах, справедливы приближённые равенства

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha. \quad (1)$$

Чтобы понять, откуда они берутся, давайте посмотрим на тригонометрическую окружность. Пусть  $P$  — точка единичной окружности, отвечающая углу  $\alpha$  (см. рисунок).



Согласно определению радианной меры угла, длина дуги окружности радиуса  $R$ , стягивающей центральный угол  $\alpha$ , равна  $R\alpha$ . Поэтому длина дуги  $PA$  равна  $1 \cdot \alpha = \alpha$ . Кроме того,  $PB = \sin \alpha$  и  $QA = \operatorname{tg} \alpha$ . Все эти три величины различны, но представьте себе, что будет при уменьшении угла  $\alpha$  — полухорда  $PB$ , дуга  $PA$  и отрезок  $QA$  фактически сольются друг с другом! Таким образом, при малых  $\alpha$  имеем

$$PB \approx PA \approx QA,$$

а это есть не что иное, как соотношения (1).

При малых углах  $\alpha$  и  $\beta$  закон преломления  $\sin \alpha / \sin \beta = n$  принимает вид  $\alpha = n\beta$ , что сильно упрощает вычисления.

**ЗАДАЧА 1.** На дне прозрачного водоёма глубиной  $H$  лежит монета. Человек, находящийся над водой, смотрит на монету так, что луч зрения перпендикулярен поверхности воды. На какой глубине  $h$  человек видит изображение монеты? Показатель преломления воды равен  $n$ .

$$\text{картинка: } \frac{h}{H} = n$$

**ЗАДАЧА 2.** Какова толщина  $d$  стеклянной плоскопараллельной пластинки, если точку на задней поверхности пластинки наблюдатель видит на расстоянии  $l$  от передней поверхности? Показатель преломления стекла равен  $n$ . Луч зрения перпендикулярен поверхности пластинки.

$$l^n = p$$

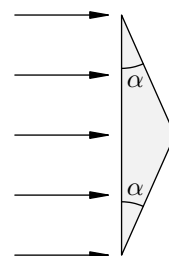
ЗАДАЧА 3. Стеклянная пластинка толщиной  $d = 3$  мм имеет на верхней и нижней сторонах царапины. Чему равен показатель преломления стекла, если при наведении микроскопа с верхней царапины на нижнюю его тубус пришлось опустить на расстояние  $l = 2$  мм? Углы отклонения от оси микроскопа лучей, попадающих в объектив, считайте малыми.

$$\varphi \approx \frac{l}{p} = u$$

ЗАДАЧА 4. На боковую грань прозрачной призмы с малым преломляющим углом  $\varphi$  падает луч света. Считая угол падения также малым, найдите угол отклонения луча, вышедшего из призмы (то есть угол  $\delta$  между вышедшим лучом и первоначальным). Показатель преломления материала призмы равен  $n$ .

$$\delta \approx (n - 1)\varphi$$

ЗАДАЧА 5. Равнобедренная стеклянная призма с малыми углами преломления  $\alpha$  помещена в параллельный пучок лучей, падающих нормально к её основанию (см. рисунок). Показатель преломления стекла  $n = 1,57$ , размер основания призмы  $2a = 5$  см. Найдите угол преломления  $\alpha$ , если в середине экрана на расстоянии  $L = 100$  см от призмы образуется тёмная полоса шириной  $2d = 1$  см.



$$\Delta x = v$$

ЗАДАЧА 6. (МФТИ, 1999) В комнате на горизонтальной поверхности стола лежит плоское стеклянное зеркало толщиной  $H = 7$  мм с показателем преломления стекла  $n = 1,4$ . Над зеркалом висит электрическая лампочка. Определите расстояние между двумя соседними изображениями светящейся нити лампочки, возникающими из-за многократных отражений от двух поверхностей зеркала.

$$\Delta x = \frac{u}{H^2} = x$$

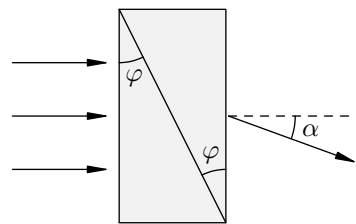
ЗАДАЧА 7. (МФТИ, 1999) Стакан с тонким дном, наполненный прозрачной жидкостью, ставится на монету, лежащую на столе. Если сверху через жидкость нормально к её поверхности рассматривать монету, то изображение монеты наблюдается на расстоянии  $h = 2,6$  см от дна стакана. Определите показатель преломления жидкости, если толщина слоя жидкости в стакане  $H = 8$  см.

$$\varphi \approx \frac{u - H}{H} = u$$

ЗАДАЧА 8. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11) Две несмешивающиеся жидкости налиты в стакан так, что высота верхнего слоя жидкости  $h_1$  в два раза больше высоты нижнего слоя жидкости  $h_2$ . Показатели преломления жидкостей —  $n_1 = 1,5$  и  $n_2 = 1,75$  соответственно. При взгляде «прямо сверху» видимое расстояние до дна сосуда от верхней границы жидкости равно  $H = 8$  см. Найдите  $h_1$  и  $h_2$ .

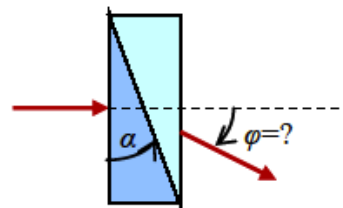
$$n_1 \frac{u}{h_1} + n_2 \frac{u}{h_2} = n_1 \frac{u}{h_1} + n_2 \frac{u}{h_2} = u$$

Задача 9. (МФТИ, 1975) Две одинаковые прямоугольные призмы с углом при вершине  $\varphi$  имеют несколько отличающиеся показатели преломления. Призмы приложены друг к другу своими гипотенузными гранями (см. рисунок). При освещении системы пучком света, падающим нормально на переднюю грань, оказалось, что выходящий пучок отклонился от первоначального направления распространения на угол  $\alpha$ . Найти разность показателей преломления  $\Delta n$ . Углы  $\varphi$  и  $\alpha$  считать достаточно малыми.



$$\frac{\delta}{v} = u \nabla$$

Задача 10. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Узкий пучок света падает нормально на поверхность плоскопараллельной пластины, склеенной из двух плотно прижатых клиньев с углом при вершине  $\alpha = 4^\circ$ . Разность показателей преломления материалов клиньев  $\Delta n = n_1 - n_2 = 0,3$ . Под каким углом к первоначальному направлению выйдет пучок из пластины? При расчётах учесть, что для малых углов  $\text{tg } \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$  (в радианной мере).



$$\delta^2 \tau = u \nabla v = \delta$$

Задача 11. Человек смотрит на рыбку, находящуюся в диаметрально противоположной от него точке шарового аквариума радиусом  $R$ . На сколько смещено при этом изображение рыбки относительно самой рыбки? Показатель преломления воды  $n = 4/3$ .

$$R = \frac{n-2}{1-n} R \tau = x$$